Funkcije vrijednosti

Vedran Šego

Rađeno prema knjizi Simon French, "Decision Theory; an introduction to the mathematics of rationality", Halsted Press, poglavlja 3.7 i 3.8.

1. Funkcija vrijednosti

1.1. Ordinalna funkcija vrijednosti. Neka je zadan neki skup alternativa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, te relacija slabog uređaja $\succeq$ nad skupom A. Kažemo da je $v(\cdot)$ ordinalna funkcija vrijednosti za $\succeq$ ako za svake $a_i, a_j \in A$ vrijedi: $v(a_i) \geq v(a_j) \Leftrightarrow a_i \succeq a_j$.

Ovakav pristup je dobar iz više razloga. Praktičnije je baratati realnom funkcijom nad skupom A, tj. nizom od n realnih brojeva, nego s relacijom uređaja. Takav zapis je kompaktniji, a i prirodniji, u smislu da je većini ljudi prirodnije objektima pridružiti nekakve težine i onda među tim težinama tražiti najveću. Objekte s tom težinom zatim prirodno proglašavamo "najboljima".

Da bi postojala ordinalna funkcija vrijednosti za relaciju $\succeq$, ona mora zadovoljavati slijedeće aksiome:

Aksiom 1.1.1 (Usporedivost). *Svake dvije alternative su usporedive relacijom $\succeq$, tj za svake $a, b \in A$ vrijedi:*

$$a \succeq b \text{ ili } b \succeq a \text{ ili oboje}$$

Aksiom 1.1.2 (Tranzitivnost). *Relacija $\succeq$ je tranzitivna, tj. za svake $a, b, c \in A$ vrijedi:*

$$a \succeq b \ i \ b \succeq c \Rightarrow a \succeq c$$

Možemo uvesti i relacije stroge preference ($\succ$) i indiferentnosti ($\sim$) pomoću slijedećih aksioma:

Aksiom 1.1.3 (Konzistentnost slabe preference i indiferentnosti). *Za svake $a, b \in A$ vrijedi:*

$$a \sim b \Leftrightarrow (a \succ b \ i \ b \succ a)$$

Aksiom 1.1.4 (Konzistentnost jake i slabe preference). *Za svake $a, b \in A$ vrijedi:*

$$a \succ b \Leftrightarrow b \not\succeq a$$

Treba naglasiti da ordinalna funkcija vrijednosti zanemaruje težine pojedinih usporedbi.

PRIMJER 1. *Uspoređujemo prosječnu ocjenu tri diplomanda: Ana (prosjek ocjena 2.0), Bruno (prosjek ocjena 4.9) i Cvijeta (prosjek ocjena 5.0). Neka su dane funkcije u i v:*

$$\begin{array}{lll} u(Ana) = 2.0 & u(Bruno) = 4.9 & u(Cvijeta) = 5.0 \\ v(Ana) = 2.0 & v(Bruno) = 2.1 & v(Cvijeta) = 5.0 \end{array}$$

Obje funkcije su jednako dobre ordinalne funkcije vrijednosti, jer se slažu s relacijom slabog uređaja među alternativama.

1.2. Izmjeriva funkcija vrijednosti. U svrhu veće ekspresivnosti za donosioca odluke, uvodimo pojam "zamjene" i relaciju slabog uređaja nad skupom zamjena.

DEFINICIJA 1. *Neka su $a, b, c, d \in A$ alternative. Kažemo da donosilac odluke preferira zamjenu $(a \leftarrow b)$ nad zamjenom $(c \leftarrow d)$, u oznaci $(a \leftarrow b) \succeq_e (c \leftarrow d)$ ako više preferira dobiti a umjesto b nego c umjesto d.*

U prvi mah, pojam zamjene može zbuniti. Dobro ga je zamišljati na slijedeći način:

PRIMJER 2. *Osoba ima predmete b i d i mora zamijeniti ili objekt b s objektom a ili objekt d s objektom c (dakle mora napraviti jednu, ali ne smije napraviti obje zamjene!). Ako se osoba radije odluči zamijeniti b s a nego d s c, kažemo da preferira zamjenu $(a \leftarrow b)$ nad zamjenom $(c \leftarrow d)$.*

Iako u pozadini zamjena ne mora nužno biti razlika težina "zamijenjenih" alternativa, mi ćemo krenuti upravo u tom smjeru.

DEFINICIJA 2. *Izmjeriva funkcija vrijednosti za relacije $\succeq$ i $\succeq_e$ je funkcija $v : A \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava:*

$$\begin{array}{l} a \succeq b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b) \ i \\ (a \leftarrow b) \succeq_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d) \end{array}$$

Očito, svaka izmjeriva funkcija vrijednosti je i ordinalna funkcija vrijednosti, no obrat ne mora vrijediti. U primjeru 1, funkcija u je izmjeriva, a funkcija v samo ordinalna funkcija vrijednosti (ukoliko pretpostavimo da su upravo prosječne ocjene referentne težine, tj. da će student uvijek željeti što više povećati svoju ocjenu).

Dakle, relacija $\succeq$ (uz pripdane relacije stroge preference i indiferentnosti) i dalje mora zadovoljavati aksiome 1.1.1 – 1.1.4. Što mora zadovoljavati relacija $\succeq_e$?

Uvedimo realnu funkciju V nad skupom zamjena definiranu formulom $V(a \leftarrow b) = v(a) - v(b)$. Trivijalno vidimo da vrijedi:

$$(a \leftarrow b) \succeq_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow V(a \leftarrow b) \geq V(c \leftarrow d)$$

što znači da je V ordinalna funkcija vrijednosti za relaciju $\succeq_e$ koja, zbog toga, također mora zadovoljavati aksiome $1.1.1 - 1.1.4$ (naravno, uz prirodnu definiciju stroge preference i indiferentnosti).

Kraće, da bi postojala izmjeriva funkcija vrijednosti za relacije $\succeq$ i $\succeq_e$, one moraju zadovoljavati slijedeći aksiom:

AKSIOM 1.2.1 (Slabi uređaj). *Relacija $\succeq$ mora zadovoljavati aksiome* $1.1.1 - 1.1.4$ *nad skupom alternativa, dok relacija $\succeq_e$ mora zadovoljavati te iste aksiome nad skupom zamjena.*

Kako prirodno povezati dvije relacije, odnosno što u terminima zamjena znači izraz $a \succeq b$? Običnim jezikom, to znači da "alternativu a smatramo boljom od alternative b". Kad bismo mogli birati između zamjene b s a i ne izvođenja nikakve zamjene, u ovom slučaju bismo izveli zamjenu b s a. Primijetimo i da "ne izvođenje nikakve zamjene" znači "zamjena objekta tim istim objektom". Sve ovo možemo zapisati na slijedeći način:

AKSIOM 1.2.2 (Konzistentnost $\succeq$ i $\succeq_e$). *Za svake $a, b \in A$ vrijedi:*

$$a \succeq b \Leftrightarrow (a \leftarrow b) \succeq_e (c \leftarrow c) \ \forall c \in A$$

Primijetimo i da se ovaj aksiom trivijalno može dobiti iz definicije ordinalne funkcije vrijednosti (definicija 2) i aksioma 1.2.1:

$$\begin{aligned}(a \leftarrow b) \succeq_e (c \leftarrow c) &\Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(c) = 0 \\ &\Leftrightarrow v(a) \geq v(b) \\ &\Leftrightarrow a \succeq b\end{aligned}$$

Na sličan način možemo dobiti i "množenje s -1":

$$\begin{aligned}(a \leftarrow b) \succeq_e (c \leftarrow d) &\Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d) \\ &\Leftrightarrow v(d) - v(c) \geq v(b) - v(a) \\ &\Leftrightarrow (d \leftarrow c) \succeq_e (b \leftarrow a)\end{aligned}$$

Dakle, za relaciju $\succeq_e$ mora vrijediti i:

AKSIOM 1.2.3. *Za svake $a, b, c, d \in A$ vrijedi:*

$$(a \leftarrow b) \succeq_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow (d \leftarrow c) \succeq_e (b \leftarrow a)$$

Sličnim raspisom možemo dobiti i slijedeću verziju tranzitivnosti za relaciju $\succeq_e$:

AKSIOM 1.2.4. *Za svake $a, b, c, d, e, f \in A$ vrijedi:*

$$(a \leftarrow b) \succeq_e (d \leftarrow e) \ i \ (b \leftarrow c) \succeq_e (e \leftarrow f) \Leftrightarrow (a \leftarrow c) \succeq_e (d \leftarrow f)$$

Na žalost, aksiomi $1.2.1 - 1.2.4$ su nužni, ali ne i dovoljni da bi garantirali postojanje izmjerive funkcije vrijednosti. Pokušajmo konstruirati izmjerivu funkciju vrijednosti na jednostavnom primjeru u kojem donosioca odluke zanima isključivo novčana vrijednost alternativa.

Primjer 3. *Neka je dan skup objekata A čije vrijednosti su u potpunosti poznate donosiocu odluke. On treba izabrati neki od tih objekata i pri tome će dobiti taj objekt. Njegova imovina raste točno za vrijednost izabranog objekta, tj. on nema nikakvih dodatnih ulaganja, gubitaka ili profita.*

Za objekte $a, b \in A$, zamjena $(a \leftarrow b)$ ne znači da će donosioc odluke objekt a zamijeniti objektom b, jer on te objekte nema, nego znači da će umjesto da uzme objekt b izabrati da uzme objekt a.

Također, pretpostavljamo da donosilac odluke uvijek preferira predmete veće vrijednosti nad predmetima manje vrijednosti.

Prvi korak u konstrukciji funkcije $v(\cdot)$ je izbor mjerne jedinice. Biramo objekt $a_1 \in A$, te postavljamo $v(a_1) := 1$. Zbog preglednije notacije, uvodimo i "imaginarni" objekt bez vrijednosti a_0, tj. objekt za koji vrijedi $v(a_0) = 0$.

U idućem koraku, pitamo donosioca odluke da izabere objekt a_2 takav da je $(a_2 \leftarrow a_1) \sim_e (a_1 \leftarrow a_0)$. Očito, za takav objekt moramo postaviti vrijednost $v(a_2) = 2$.

Induktivno, nalazimo objekte a_k takve da je $v(a_k) = k$, tj. da vrijedi:

$$(a_1 \leftarrow a_0) \sim_e (a_2 \leftarrow a_1) \sim_e \cdots \sim_e (a_k \leftarrow a_{k-1}) \cdots$$

Pretpostavimo da želimo pronaći vrijednost nekog objekta $a \in A$. Ako postoji k takav da je $a = a_k$, onda je $v(a) = k$. U protivnom, pretpostavimo da postoji k takav da je

$$a_{k+1} \succeq a \succeq a_k$$

što automatski povlači i

$$k + 1 \geq v(a) \geq k$$

Sada tražimo donosioca odluke da izabere objekt $a_{k+1/2} \in A$ takav da vrijedi

$$(a_{k+1} \leftarrow a_{k+1/2}) \sim_e (a_{k+1/2} \leftarrow a_k)$$

Ponovno, zbog toga što želimo da $v(\cdot)$ bude izmjeriva funkcija vrijednosti, mora biti

$$v(a_{k+1/2}) = k + 1/2$$

Zbog toga je $a_{k+1} \succ a_k$, što znači da je

$$\text{ili } a_{k+1} \succeq a \succeq a_{k+1/2} \text{ ili } a_{k+1/2} \succeq a \succeq a_k$$

U svakom slučaju, nastavljamo raspolavljati odgovarajući segment.

Na ovaj način možemo proizvoljno precizno izračunati vrijednost objekta a za donosioca odluke.

Proces opisan u prethodnom primjeru je intuitivan: odredimo mjernu jedinicu, povećavamo ju onoliko puta koliko je potrebno da premašimo vrijednost danog objekta, a zatim raspolavljanjem profinjujemo dobivenu vrijednost. Ovakva intuitivnost može zavarati, tj.

lako je zaboraviti da uzimamo zdravo za gotovo da donosilac odluke uvijek može odgovoriti na slijedeća pitanja:

(i) Ako su dani $b, c, d \in A$, koji $a \in A$ zadovoljava relaciju

$$(a \leftarrow b) \sim_e (c \leftarrow d)?$$

(ii) Ako su dani $b, c \in A$, koji $a \in A$ zadovoljava relaciju

$$(b \leftarrow a) \sim_e (a \leftarrow c)?$$

Ova pretpostavka se naziva "pretpostavka rješivosti". Odgovarajući aksiom kaže da na upravo postavljena pitanja moraju postojati odgovori.

Aksiom 1.2.5 (Rješivost).

(i) *Za sve $b, c, d \in A$ postoji $a \in A$ takav da je*

$$(a \leftarrow b) \sim_e (c \leftarrow d)$$

(ii) *Za sve $b, c \in A$ postoji $a \in A$ takav da je*

$$(b \leftarrow a) \sim_e (a \leftarrow c)$$

U primjeru smo koristili i pretpostavku da za svaki $a \in A$ postoji k takav da je $a_{k+1} \succeq a \succeq a_k$, tj. da ne postoji $a \in A$ takav da je $a \succeq a_k \; \forall k$. Ova pretpostavka odgovara Arhimedovom aksiomu realnih brojeva (razlika proizvoljna dva različita realna broja je najviše konačno puta veća od razlike bilo koja dva druga različita realna broja).

Definicija 3 (Standardna sekvenca). *Objekti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ čine standardnu sekvencu ako su u nekom smislu jednako udaljeni.*

Niz $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je primjer standardne sekvence, jer vrijedi:

$$(a_{k+1} \leftarrow a_k) \sim_e (a_1 \leftarrow a_0) \; \forall k$$

Definicija 4 (Strogo omeđena standardna sekvenca). *Standardna sekvenca $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je strogo omeđena ako za neki fiksni b vrijedi: $b \succ a_k \; \forall k$.*

Uz ove definicije, lako je zapisati Arhimedov aksiom za relaciju preference $\succ$ (i pripadnu $\succ_e$) nad skupom alternativa A.

Aksiom 1.2.6 (Arhimedovost). *Svaka strogo omeđena standardna sekvenca je konačna.*

Upravo zbog ovog aksioma koristimo izraz "sekvenca" jer "niz" (kao funkcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$) podrazumijeva beskonačnost.

Primijetimo kako je ovaj aksiom također i nužan za postojanje izmjerive funkcije vrijednosti. Kada on ne bi vrijedio, nužno bi morala postojati alternativa beskonačne vrijednosti, pa odgovarajuća funkcija vrijednosti ne bi mogla za kodomenu imati skup $\mathbb{R}$.

Ova dva nova aksioma nam osiguravaju postojanje funkcije $v(\cdot)$ opisane u primjeru 3. Nije *a priori* jasno da će dobivena funkcija ujedno biti i izmjeriva funkcija vrijednosti, jer je definirana isključivo preko relacija indiferentnosti ($\sim_e$). No, uz primjenu definicije 2, lako se vidi da su vrijednosti $v(a_i)$ namještene upravo tako da $v(\cdot)$ stvarno bude izmjeriva funkcija vrijednosti.

Iz prethodnog razmatranja proizlazi slijedeća

PROPOZICIJA 5. *Ako su za relacije $\succeq$ i $\succeq_e$ zadovoljeni aksiomi* $1.2.1 - 1.2.6$*, onda postoji i odgovarajuća funkcija vrijednosti.*

Aksiomi $1.2.1 - 1.2.4$ *i 1.2.6 su nužni za postojanje takve funkcije.*

Aksiomi rješivosti i arhimedovosti su specifični za funkciju $v(\cdot)$ konstruiranu u primjeru 3. Neka druga konstrukcija bi tražila drugačije aksiome, no oni bi u svojoj biti morali ostati nepromijenjeni. Dodatno, pretpostavljali smo da je donosilac odluke u potpunosti upoznat s konkretnim vrijednostima objekata iz skupa alternativa, što će se u praksi rijetko događati.

Vunkcije vrijednosti su jedinstvene do na strogo rastuće transformacije. Možemo li preciznije odrediti koje su to transformacije?

PRIMJER 4. *Neka je $A = \{a, b, c\}$ takav da je $a \succ b \succ c$ i da vrijedi: $(a \leftarrow c) \succ_e (a \leftarrow b) \succ_e (b \leftarrow c)$. Tada su funkcije $u(\cdot)$ i $v(\cdot)$, zadane formulama:*

$$\begin{array}{lll} u(a) = 10 & u(b) = 3 & u(c) = 0 \\ v(a) = 12 & v(b) = 4 & v(c) = 0 \end{array}$$

izmjerive funkcije vrijednosti za relacije $\succ$ i $\succ_e$. Ove su funkcije povezane strogo rastućom transformacijom $\varphi(10) = 12$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(0) = 0$. No, znamo da strogo rastuća transformacija ne čuva uređaj razlika elemenata domene.

Ono što nam ovdje nedostaje, su dodatni uvjeti na sâm skup A. Kao što smo vidjeli u razmatranju primjera 3, rješivost je jedan od dovoljnih preduvjeta postojanja izmjerive funkcije vrijednosti. No, u našem primjeru ne postoji x takav da je $(x \leftarrow c) \sim_e (a \leftarrow b)$.

PROPOZICIJA 6. *Za skup A koji zadovoljava prikladni aksiom rješivosti, funkcije $u(\cdot)$ i $v(\cdot)$ su izmjerive funkcije vrijednosti nad relacijama $\succeq$ i $\succeq_e$ ako i samo ako postoje realni brojevi $\alpha > 0$ i β takvi da je $v(a) = \alpha \cdot u(a) + \beta$ za svaki $a \in A$.*

DOKAZ.

$$\begin{aligned} a \succeq b &\Leftrightarrow v(a) \geq v(b) \Leftrightarrow \alpha \cdot u(a) + \beta \geq \alpha \cdot u(b) + \beta \\ &\Leftrightarrow u(a) \geq u(b) \\ (a \leftarrow b) \succeq_e (c \leftarrow d) &\Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d) \\ &\Leftrightarrow \alpha \cdot u(a) + \beta - \alpha \cdot u(b) - \beta \geq \\ &\quad \geq \alpha \cdot u(c) + \beta - \alpha \cdot u(d) - \beta \\ &\Leftrightarrow u(a) - u(b) \geq u(c) - u(d) \end{aligned}$$

Dakle, obje funkcije $u(\cdot)$ i $v(\cdot)$ zadovoljavaju uvjete definicije 2. Obratnu tvrdnju, tj. nužno postojanje parametara α i β iz tvrdnje propozicije, nećemo dokazivati. $\square$

Propozicija nam zapravo govori da je, uz razumne uvjete rješivosti, izmjeriva funkcija vrijednosti jedinstvena do na pozitivne afine transformacije. Očito, možemo uzeti proizvoljnu točku ishodišta (tj. objekt "vrijednosti" nula) i jediničnu mjeru, no ostale vrijednosti su tada jedinstveno određene tim dvjema vrijednostima i relacijama preference.

Uzmimo, na primjer, $u(b) = 0$ i $a \succ b$ za neke $a, b \in A$. Ako definiramo

$$\alpha = \frac{1}{u(a) - u(b)} \text{ i } \beta = -\frac{u(b)}{u(a) - u(b)}$$

te funkciju $v(x) = \alpha \cdot u(x) + \beta$, onda je $v(a) = 1$ i $v(b) = 0$.

Sada je jasno da imamo samo jednu transformaciju koja "uzemljuje" izabrani objekt, te ima jediničnu mjeru određenu drugim izabranim objektom. Također, jasno je i da proizvoljnost izbora objekta a_1 u primjeru 3 nije uvela nikakva nova ograničenja.

Prilikom konstrukcije funkcije vrijednosti u primjeru 3, jako smo se oslanjali na informacije dobivene od donosioc odluke i to baš vezano uz zamjene. Kako je riječ o pojmu kojeg je često teško percipirati, pogledajmo slijedeći primjer:

PRIMJER 5. *Neka je dan skup alternativa $A = \{a, b, c, d\}$ uz slijedeća objašnjenja:*

a - *osoba je savršeno zdrava i dobit će božićnicu od 1719kn*
b - *osoba je savršeno zdrava i dobit će božićnicu od 1713kn*
c - *osoba je umjereno zdrava, ali neće dobit nikakvu božićnicu*
d - *osoba je teško bolesna i umire u mukama (bez božićnice)*

Većina ljudi će se složiti da je razlika između c i d daleko veća nego između a i b, no ipak će mnogi ljudi radije izabrati $(a \leftarrow b)$ nego $(c \leftarrow d)$ uz razmišljanje da je "bolje završiti u stanju a nego u stanju c. Ovakvo gledanje na stvari je prirodno, ali pogrešno, jer prilikom uspoređivanja zamjena ne uspoređujemo završna stanja, niti se ona nude, nego uspoređujemo "razlike" među stanjima (alternativama).

Kao što smo vidjeli, za primjenu ovdje predočenih rezultata, izuzetno je važno da donosilac odluke dobro razumije pojam zamjene i da ga je u stanju razdvojiti od stanja kojima se ta zamjena bavi. Zbog toga je i oznaka zamjene $(a \leftarrow b)$ takva kakva je, kako bi se minimiziralo naglašavanje alternativa, a maksimiziralo naglašavanje same zamjene.