# Teorija odlučivanja
## predavanja 2010.

Lavoslav Čaklović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU, PMF MATEMATIČKI ODJEL
*E-mail address*: `caklovic@math.hr`

# Sadržaj

POGLAVLJE 1

# Odlučivanje uz jaku nesigurnost

## 1. Umjesto uvoda

**1.1. Ekvivalentne zamjene.** Zamjena događaja je jednostavna tehnika donošenja odluke u problemima s više atributa (kriterija) koji nemaju utočište u formalnoj relaciji preferencije. Tehniku ćemo ilustrirati na sljedećem primjeru.

PRIMJER 1.1. Advokatska firma želi iznajmiti novi ured zbog povećanog obujma posla. Nakon eliminacije velikog broja potencijalnih lokacija koje nisu zadovoljavale osnovne zahtjeve ostalo ih je u užem izboru samo pet. Direktor firme pri donošenju odluke obraća pažnju na pet kriterija, zvat ćemo ih atributi, koje utječu na finalnu odluku. To su:

- udaljenost od centralnog ureda (izraženo u minutama);
- blizina klijenata (izraženo u postotku klijenata koji žive u blizini ureda);
- opremljenost ureda, mjereno na skali s tri nivoa:
  A – sve pogodnosti,
  B – telefon i faks,
  C – bez pogodnosti;
- veličina ureda mjereno u kvadratnim stopama;
- visina mjesečnog najma izraženo u dolarima

Procjena svakog ureda prema atributima dana je u tablici 1.1. Konzultant

| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| udaljenost | 45 | 25 | 20 | 25 | 30 |
| klijenti | 50 | 80 | 70 | 85 | 75 |
| opremljenost | A | B | C | A | C |
| veličina | 800 | 700 | 500 | 950 | 700 |
| najam | 1850 | 1700 | 1500 | 1900 | 1750 |

TABLICA 1.1. Procjena lokacija prema atributima.

u donošenju odluke dao je, na temelju te tablice, preferencije za svaki od atributa nezavisno od ostalih atributa. Preferencije rastu s brojem bliskih klijenata, nivoom opremljenosti i veličinom, a padaju s većom cijenom i udaljenošću.

Tehnički naziv za ured je alternativa. Reći ćemo da je alternativa $x$ dominirana s alternativom $y$ ako je $y$ jednako prihvatljiva kao $x$ ako ne i bolja za sve atribute dok je strogo preferirana bar za jedan atribut. Dominirane alternative očito nisu kandidati za izbor najbolje lokacije.

- U ovom primjeru je očito alternativa $e$ je dominirana alternativom $b$, pa prema tome alternativu $e$ možemo izbaciti iz natjecanja. To je jedini slučaj "čiste" dominacije u tabeli.
- Alternativa $d$ je prihvatljivija od $a$ za svaki kriterij osim po cijeni najma po kojem je alternativa $a$ prihvatljivija jer je 50 $ jeftinija. Čini se ipak da je taj nedostatak od 50 $ kompenziran i prvagnut u ostalim atributima, udaljenost (20 min), klijenti (35 %), i veličina (150 kv. stopa), tako da alternativu $a$ također možemo izbaciti iz utrke za prvo mjesto.

U borbi za prvo mjesto ostale su dakle alternative $b, c$ i $d$:

| | b | c | d |
|---|---|---|---|
| udaljenost | 25 | 20 | 25 |
| klijenti | 80 | 70 | 85 |
| opremljenost | B | C | A |
| veličina | 700 | 500 | 950 |
| najam | 1700 | 1500 | 1900 |

TABLICA 1.2. Reducirana tabela.

Prirodan put za nastavak je određivanje *ekvivalentnih zamjena*. Primijetimo da sve alternative, osim $c$, imaju jednako vrijednu udaljenost. Možemo pitati konzultanta, imajući u vidu alternativu $c$, koliki gubitak u atributu *klijenti* može kompenzirati prednost od 5 min u atributu *udaljenost*. Traži se dakle hipotetička alternativa $c'$ za koju je vrijednost atributa *udaljenost* jednaka 25 i svi ostali atributi su jednako vrijedni kao i kod $c$ osim u atributu *klijenti*. Pronalaženje ekvivalentne zamjene (eng. trade

| | c | c' |
|---|---|---|
| udaljenost | 20 | **25** |
| klijenti | 70 | **70**+$\delta$ |
| opremljenost | C | C |
| veličina | 500 | 500 |
| najam | 1500 | 1500 |

TABLICA 1.3. Ekvivalentna zamjena.

off) igra ključnu ulogu u teoriji odlučivanja i u praksi je to najdelikatniji trenutak kojem treba obratiti dovoljno pažnje. Ako se atributi mjere na diskretnoj skali, što ovog trenutka nije slučaj, može se desiti da ekvivalentnu zamjenu nije moguće odrediti.

Pretpostavimo da je odgovor konzultanta $\delta = 8$, tada su $c$ i $c'$ jednako vrijedne alternative i tablica 1.1 se zamijeni ekvivalentnom tablicom 1.4. U toj, ekvivalentnoj tabeli, alternative se ne razlikuju po prvom atributu

| | b | c' | d |
|---|---|---|---|
| ~~udaljenost~~ | ~~25~~ | ~~25~~ | ~~25~~ |
| klijenti | 80 | 78 | 85 |
| opremljenost | B | C | A |
| veličina | 700 | 500 | 950 |
| najam | 1700 | 1500 | 1900 |

TABLICA 1.4. Ekvivalentna reducirana tabela.

pa ih prema njemu ne možemo razlikovati. Stoga nema smisla uvažavati taj atribut i možemo ga brisati iz tabele što daje novu tabelu 1.5. U

| | b | c' | d |
|---|---|---|---|
| klijenti | 80 | 78 | 85 |
| opremljenost | B | C | A |
| veličina | 700 | 500 | 950 |
| najam | 1700 | 1500 | 1900 |

TABLICA 1.5. Ekvivalentna reducirana tabela II.

novoj reduciranoj tabeli nema slučaja dominacije i prinuđeni smo tražiti nove ekvivalentne zamjene. Prvo moramo odrediti alternativu kojoj nalazimo ekvivalentnu zamjenu, neka to bude $c'$, a zatim atribute s kojima ćemo 'trgovati'. Jedan od ta dva atributa će biti neutraliziran i izbačen iz razmatranja u ovom ili možda sljedećem koraku. Konzultant se odlučio za neutralizaciju atributa *opremljenost* s kompenzacijama u atributu *najam*. Zašto? Razlog je u tome što je mjerna skala atributa *opremljenost* diskretna i ekvivalentne zamjene je lakše naći na kontinuiranoj skali (*cijena*). Tablica ekvivalentnih zamjena je: Slobodno možemo zaboraviti ulogu atributa *opremljenost* u daljnjem odlučivanju i brisati drugi redak tabele. Ako to učinimo onda je očito da je alternativa $c''$ dominirana alternativom $b$. Nova

| | b | c” | d’ |
|---|---|---|---|
| klijenti | 80 | 78 | 85 |
| ~~opremljenost~~ | ~~B~~ | ~~**B**~~ | ~~**B**~~ |
| veličina | 700 | 500 | 950 |
| najam | 1700 | **1750** | **1800** |

TABLICA 1.6. Ekvivalentna reducirana tabela III.

| | b | d’ |
|---|---|---|
| klijenti | 80 | 85 |
| veličina | 700 | 950 |
| najam | 1700 | 1800 |

TABLICA 1.7. Ekvivalentna reducirana tabela IV.

tabela bez alternative $c''$ i atributa *opremljenost* je tabela 1.7 Na nesreću, u novoj tabeli nema slučajeva dominacije pa moramo tražiti ekvivalentne zamjene. Imajući u vidu aternativu $b$ i atribut *veličina*, pitamo konzultanta koliki je ekvivalent povećanog najma mjesečno kako bi veličinu ureda $b$ povećali za 250 kvadratnih stopa. Grubi odgovor je 250 $ i suočeni smo s novom tabelom 1.8. Atribut *veličina* sada možemo izbaciti kao kriterij

| | b’ | d’ |
|---|---|---|
| klijenti | 80 | 85 |
| ~~veličina~~ | ~~**950**~~ | ~~950~~ |
| najam | **1950** | 1800 |

TABLICA 1.8. Ekvivalentna reducirana tabela V.

u donošenju odluke. Učinimo li to, onda je jasno da $d'$ dominira u odnosu na $b'$. Nakon takve analize preporučeno je da se unajmi ured $d$ kao najpovoljniji izbor.

Sumirajmo ključne korake u rješavanju gornjeg primjera. Konačna preporuka je bila da treba iznajmiti ured $d$. To znači da imamo razloga vjerovati da je ured $d$ preferiran u odnosu na ostale. Ako relaciju preferencije označimo s $\succ$ to znači da je $d \succ a$ i $d \succ b$ i $d \succ c$ i $d \succ e$. Kako smo logički došli do tog zaključka? Na temelju podataka iz prve tabele, koristeći dominiranost po svim atributima zaključili smo $b \succ e$ i $d \succ a$. Nakon što smo odredili ekvivalenciju nekih zamjena zaključili smo, opet koristeći domoniranost, da je $b \succ c''$, gdje je $c''$ bio konstruiran tako da je *indiferentan* u odnosu na $c'$, a $c'$ je bio konstruiran tako da je bio indiferentan u odnosu na $c$. Simbolički pisano, $c \sim c'$ i $c' \sim c''$ gdje relacija $\sim$ označava indiferentnost. Nakon toga smo konstruirali $d'$ koji je indiferentan u odnosu $d$, tj. $d \sim d'$ i alternativu $b'$ koja je indiferentna $b$ tj. $b \sim b'$. Nakon toga smo zaključili, opet koristeći dominiranost da je $d'$ preferirano u odnosu na $b'$ tj. $d' \sim b'$. Dakle, ono što znademo je:

$$
\begin{gathered}
d \succ a, b \succ e, \\
c'' \sim c', c' \sim c, b \succ c'' \\
d \sim d', b \sim b', d' \succ b'.
\end{gathered}
$$

Ako želimo biti konzistentni u zaključivanju onda zahtjevamo od gornjih relacija da budu tranzitivne, dakle lako se vidi da posljednji redak implicira $d \succ b$. Kako je $b \succ e$ onda je i $d \succ e$. Ostaje još pokazati da je $d \succ c$. Iz drugog retka zaključujemo da je $b \succ c$, a kako je $d \succ b$ onda je zbog tranzitivnosti i $d \succ c$ što smo i htjeli dokazati.

Ovaj primjer zaslužuje nekoliko komentara. Kao prvo, broj alternativa i atributa je relativno malen i nije trebalo tražiti mnogo ekvivalentnih zamjena. Prigovor takvoj proceduri je taj bismo je trebali ponoviti ako najbolju alternativu izbacimo iz konkurencije zbog nekog razloga, na primjer ako tražimo drugu alternativu po važnosti, ili ako naknadno dodamo novu alternativu. Osim toga, ova tehnika ne uvažava 'nepreciznost' u određivanju ekvivalentnih zamjena i moglo bi se desiti da male pogreške u procjeni izbace neku drugu alternativu kao optimalnu.

Prvi korak u izgrađivanju modela odlučivanja bio bi formalizacija koraka iz gornjeg primjera. Poteškoća u određivanju ekvivalentnih zamjena leži u nemogućnosti mjerenja atributa ponuđenih alternativa. To je posebno teško učiniti u situaciji kad oni nisu 'nezavisni'. Nezavisnost smo intuitivno pretpostavili u našem primjeru.

**1.2. Mjerenje duljine.** U ovom primjeru ćemo opisati jednostavnu situaciju mjerenja, a to je mjerenje duljine štapova. Mjerenja u socijalnim znanostima predstavljaju poseban problem i oni kojima je dana ta mogućnost, kao fizičarima na primjer, ne razmišljaju o tehničkim i filozofskim pitanjima koje iz te mogućnosti proizlaze, barem ne u kontekstu Newtonove fizike.

Pretpostavimo da na raspolaganju imamo nekoliko ravnih krutih štapova i želimo odrediti duljinu svakog od njih. Prvi i najjednostavniji pokušaj mjerenja bio bi da ih objesimo na horizontalan strop i usporedimo položaje donjih krajeva štapova. Moguće su dvije situacije: ili su donji krajevi, za dva odabrana štapa, poravnati ili je jedan od njih dulji. Eksperiment sugerira da uvedemo relaciju $\sim$ u prvom i $\succ$ slučaju na sljedeći način:

$$r \succ r' \text{ ako je štap } r \text{ dulji od } r',$$
$$r \sim r' \text{ ako su štapovi } r \text{ i } r' \text{ jednako dugački.}$$

Ako duljinu smatramo kvalitetom štapa koja je mjerljiva onda je za očekivati da su relacije $\sim$ i $\succ$ tranzitivne i da $r \sim r'$ & $r' \succ r''$ povlači $r \succ r''$. Iako izgledaju prirodni, to su prilično jaki zahtjevi i česta je situacija u praksi da su oni narušeni, naročito ako je mjerenje loše obavljeno, a kvaliteta koju mjerimo je približno jednako zastupljenja u oba objekta koja uspoređujemo. Ti su zahtjevi idealizacija onoga što očekujemo od savršenog mjerenja, a to je *konzistentnost*.

U ovom smo trenutku još uvijek daleko od instrumenta koji mjeri duljinu štapa. Međutim, ove su informacije dovoljne da svakom štapu pridjelimo broj tako da uspoređivanje tih brojeva u potpunosti reflektira eksperimentalni rezultat dobiven uspoređivanjem. Ako je ispunjen zahtjev konzistentnosti onda je moguće konstruirati funkciju $\Phi$, teorem 2.3 na str. 16, koja će svakom štapu pridjeliti numeričku vrijednost na način da je zadovoljeno sljedeće:

$$r \succ r' \Leftrightarrow \Phi(r) > \Phi(r')$$
$$r \sim r' \Leftrightarrow \Phi(r) = \Phi(r').$$

Ako je eksperiment skup ili neizvediv onda je poznavanje takve funkcije dragocjeno jer objedinjuje sve rezultate dobivene eksperimentom.

Sljedeći važan korak prema konstrukciji mjere koju bismo zvali 'duljina' štapa je spoznaja da je moguće formirati nove štapove spajanjem postojećih nadovezujući ih u jedan, ali duži štap. Nazovimo taj proces ***konkatenacija*** i označimo ga kružićem $\circ$. Imajući 'duljinu' u primisli očekujemo od funkcije $\Phi$ da je invarijantna na komutativnost i asocijativnost konkatenacije, tj. da $r \circ s$ ima istu duljinu kao i $s \circ r$, a $(r \circ s) \circ t$ ima istu duljinu kao i $r \circ (s \circ t)$. Je li moguće izračunati duljinu štapa nastalog konkatenacijom ako je poznata duljina svakog pojedinog štapa. Drugim riječima *ne želimo* ponavljati eksperiment s konkaterniranim štapom već želimo *imati mogućnost* izračunavanja duljine konkateniranih štapova. Najjednostavnije je *prihvatiti*, imajući u vidu bogato iskustvo u mjerenju duljine da je

$$\Phi(r \circ r') = \Phi(r) + \Phi(r').$$

Gornja pretpostavka je dodatni zahtjev na prirodu kvalitete (objekata) koju mjerimo. To je ujedno i dodatni zahtjev na ishod eksperimenta uspoređivanja koji nužno moraju biti *kompatibilni* s konkatenacijom, tj.

$$r \succ r' \;\&\; t \sim t' \implies r \circ t \succ r' \circ t'.$$

Čest je slučaj u praksi da su i ti zahtjevi narušeni, no mi bismo i dalje htjeli imati teoriju koja bi rekonstruirala funkciju $\Phi$.

Primijetimo da nas želja za računanjem duljine konkateniranih štapova vodi u apstraktnu konstrukciju dovoljno bogate strukture čiji jedan, i to konačan dio, čine naši polazni objekti. Imajući u vidu želju da rezultat mjerenja bude broj, ta apstraktna struktura mora biti dovoljno bogata da ima strukturu koja je na neki način bliska strukturi realnih brojeva. To su učinili von Neumann i Morgenstern i o tome će kasnije biti govora.

Evo jednostavnog primjera. Pretpostavimo da imamo pet štapova $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ i da zbog nedostatka prostora možemo konkatenirati najviše dva štapa i da, još k tome, nisu moguće baš sve konkatenacije. Osim toga, pretpostavimo da ne postoji mogućnost repliciranja pojedinih štapova, tako da konkatenacija štapa sa samim sobom također nije izvediva. Pretpostavimo da su rezultati uspoređivanja duljine konkateniranih štapova sljedeći:

$$r_1 \circ r_5 \succ r_3 \circ r_4 \succ r_1 \circ r_2 \succ r_5 \succ r_4 \succ r_3 \succ r_2 \succ r_1.$$

Naš je problem konstruirati funkciju $\Phi$ za koju će račun duljine konkateniranih štapova biti u skladu s eksperimentom. U sljedećoj tablici dane su tri moguće takve funkcije.

| | $\Phi$ | $\Phi'$ | $\Phi''$ |
|---|---|---|---|
| $r_1$ | 14 | 10 | 14 |
| $r_2$ | 15 | 91 | 16 |
| $r_3$ | 20 | 92 | 17 |
| $r_4$ | 21 | 93 | 18 |
| $r_5$ | 28 | 100 | 29 |

Sve tri funkcije jednako dobro reflektiraju eksperiment uspoređivanja nekonkateniranih štapova, jer su kompozicije $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ i $\Phi'' \circ \Phi^{-1}$ strogo rastuće. Međutim, samo prva i treća su u skladu s konkatenacijom jer je $\Phi(r_1 \circ r_5) = 110$ a $\Phi(r_3 \circ r_4) = 185$ što nije u skladu s eksperimentom $r_1 \circ r_5 \succ r_3 \circ r_4$.

Od ovakvih numeričkih reprezentacija duljine imamo ograničenu korist. Izazivaju čovjeka da predviđa duljinu konkatenacije koju nije mogao izvršiti. Tako na primjer, mogli bismo zaključiti da je $r_2 \circ r_3 \sim r_1 \circ r_4$ jer je $\Phi(r_2) + \Phi(r_3) = 15 + 20 = 14 + 21 = \Phi(r_1) + \Phi(r_4)$, a kad bi umjesto $\Phi$ koristili $\Phi''$ dobili bismo zaključak $r_2 \circ r_3 \succ r_1 \circ r_4$.

U čemu smo pogriješili? Što je to što još nismo uočili a implicitno je sadržano u svakom mjerenju? To je postojanje standardnog ili *etalon metra* koji služi kao jedinica za mjerenje, označimo ga s $s_0$. Zatim pretpostavljamo da moguće učiniti dovoljan broj kopija $s_1, s_2, \ldots$ od $s_0$. Imamo dakle

$$s_0 \sim s_1, s_0 \sim s_2, s_0 \sim s_3, \ldots$$

Dogovorimo se također da je duljina od $s_0$ jednaka 1. Koristeći $s_0$ i njegove kopije možemo bez sumnje odrediti duljini svakog pojedinačnog i konkateniranog štapa na sljedeći način. Prvo odredimo *standardne nizove duljine* $n$ koje ćemo označiti s $S(n) = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_n$, to su složeni objekti nastali konkatenacijom $n$ savršenih kopija standardnog metra $s_0$. Mjerna duljina od $S(n)$ je točno $n$.

Uzmimo sada proizvoljan štap $r$ i usporedimo ga sa standardnim nizovima: $S(1), S(2), \ldots$ Dva su moguća slučaja. Postoji standardni niz $S(k)$ tako da je $r \sim S(k)$, u tom slučaju je mjerni broj $\Phi(r) = k$, ili postoje dva uzastopna niza $S(k-1)$ i $S(k)$ takva da je $r \succ S(k-1)$ i $S(k) \succ r$. To znači da je $\Phi(r)$ takav da je $k - 1 < \Phi(r) < k$. Čini se da smo u gabuli jer još uvijek nismo točno odredili $\Phi(r)$. Kako nastaviti dalje? To ovisi o tehnologiji pravljenja savršenih kopija. Pretpostavimo da je moguće napraviti savršenu kopiju, ne samo etalon metra, nego i bilo kojeg drugog štapa. Ako je to tako onda možemo replicirati štap $r$ i napraviti niz savršenih kopija $r_1, r_2, \ldots$ tog štapa. Kao i ranije sada uspoređujemo $r_1 \circ r_2$ sa standardnim nizovima $S(1), S(2), \ldots$ i možemo odrediti vrijednost $\Phi(r_1 \circ r_2) = 2\Phi(r)$ unutar intervala duljine 1. To drugim riječima znači da možemo $\Phi(r)$ odrediti unutar intervala duljine $1/2$. Ponavljajući isti postupak za konkatenaciju $r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_n$ možemo odrediti $\Phi(r)$ unutar intervala duljine $1/n$, dakle s proizvoljnom točnošću. Govoreno matematičkim rječnikom možemo konstruirati konvergentan niz čiji je limes jednak $\Phi(r)$.

Pretpostavka da je moguće savršeno replicirati bilo koji objekt je jaki tehnološki zahtjev. Ako to nije moguće, izlaz možemo potražiti u usitnjavanju standardnog metra i pravljenju savršenih kopija njegovih dijelova. Matematički aparat koji je u pozadini mjernog procesa gore opisanog, baziran je na teoriji uređenih grupa i lijepo je opisan u knjizi [**22**].

Korisno je gore opisani proces imati na umu kod složenijih mjerenja u socijalnim znanostima na primjer. Osnovni koraci su, ponovimo to još jednom, sljedeći:

- relacije $\succ$ i $\sim$ koje izražavaju eksperimentalne činjenice uspoređivanja objekata,
- operaciju konkatenacije $\circ$ koja dozvoljava konstrukciju složenih objekata,
- konzistentnost $\succ$, $\sim$ i $\circ$,
- mogućnost izrade savršenih kopija pojedinih objekata za izgradnju standardnih nizova.

U prethodnom primjeru izbora lokacije za novi ured tražili smo ekvivalentne zamjene. U tom procesu izjednačavali smo 'duljinu', možda je bolje u ovom slučaju reći važnost, intervala preferencije za različite atribute. Prisjetimo se kako smo odredili alternativu $c'$: izjavili smo da interval $[25, 20]$ za atribut *udaljenost* ima istu 'duljinu' kao interval $[70, 78]$ za atribut *klijenti*.

Zamislimo sada alternativu $f$ koja bi bila identična alternativi $c$ osim po vrijednosti atributa *klijenti* koja iznosi 78% na primjer. Ponovno možemo pitati koliko povećanje u postotku klijenata će kompenzirati gubitak od 5 minuta u *udaljenosti*. Uspoređujemo dakle, sljedeće dvije alternative u tablici:

| | f | f' |
|---:|:---:|:---:|
| udaljenost | 20 | 25 |
| klijenti | 78 | 78+$\delta$ |
| opremljenost | C | C |
| veličina | 500 | 500 |
| najam | 1500 | 1500 |

Pretpostavimo da je odgovor da će za vrijednost $\delta = 10$ alternative $f$ i $f'$ biti indiferentne. To znači da interval $[25, 20]$ u atributu *udaljenost* ima istu duljinu kao i interval $[78, 88]$ u atributu *klijenti*. Sada znamo da intervali $[70, 78]$ i $[78, 88]$ imaju istu 'duljinu' pa smo u sličnoj situaciji kao kod određivanja standardnih nizova samo što smo to postigli koristeći drugi atribut u ulozi posrednika.

**1.3. Preferencijalna zavisnost kriterija.** Pogledajmo još jedan primjer, ovaj puta se radi o ocjenjivanju učenika. Ocjenjivanje je posebno teško modelirati jer tu dolazi do izražaja efekt interakcije među kriterijima koji narušava aditivnost kriterija kakvu smo imali do sada. Evo primjera za ilustraciju.

PRIMJER 1.2. Četiri učenika su pristupila ispitima iz fizike, matematike i ekonomije i rezultati tih ispita dani su u sljedećoj tablici:

| | $F$ | $M$ | $E$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 18 | 12 | 6 |
| $b$ | 18 | 7 | 11 |
| $c$ | 5 | 17 | 8 |
| $d$ | 5 | 12 | 13 |

Svaki redak u gornjoj tablici predstavlja sve ocjene tog studenta-retka, kažemo da je to njegov ***profil***, a cijela tablica je skup profila. Uobičajen tehnika donošenja zajedničke ocjene za sve kriterije je računanje srednje ocjene po formuli

$$o = \sum_{i=1}^{n} w_i o_i,$$

gdje je $n$ broj kriterija (parcijalnih ocjena) s težinama $w_1, \ldots, w_n$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ i $o_i$ parcijalna ocjena studenta na temelju kriterija $c_i$. Srednje ocjene studenata $a$, $b$ su jednake i iznose 12, a isto tako su jednake i srednje ocjene studenata $c$, $d$ i iznose 10.

Pogledajmo sada kako razmišlja nastavnik, donosilac odluke. Napomenimo još da je maksimalna moguća ocjena 20 i da je prag prolaznosti 10. Tablica sugerira da studente $a$ i $b$ rangiramo ispred sudenata $c$ i $d$. Student $c$ je podbacio u dva predmeta i razumno ga je staviti na dno liste. Student $a$ ima veći zbroj ocjena iznad praga od studenta $b$ pa nastavnik smatra da bi studenta $a$ trebalo rangirati ispred $b$. Slijedeći istu nit razmišljanja student $d$ je bolji od studenta $c$ jer ima ocjene iz matematike i ekonomije iznad praga dok student $c$ ima samo jednu takvu ocjenu. Stoga je razumno studenta $d$ rangirati ispred $c$. Rezultat ovakvog razmišljanja je rangiranje

$$a \succcurlyeq b \succcurlyeq d \succcurlyeq c.$$

Gornje rangiranje nije u skladu s metodom srednje ocjene što se vidi iz sljedećeg razmatranja. Označimo težine kurseva s $w_F$, $w_M$ i $w_E$.

- Ako je srednja ocjena od $a$ veća nego srednja ocjena od $b$ onda je nužno $w_M > w_E$. Zaista,

$$18w_F + 12w_M + 6w_E > 18w_F + 7w_M + 11w_E \Rightarrow w_M > w_E,$$

- ako je srednja ocjena od $d$ veća nego srednja ocjena od $c$ onda je nužno $w_E > w_M$. Zaista,

$$5w_F + 12w_M + 13w_E > 5w_F + 17w_M + 8w_E \Rightarrow w_E > w_M,$$

što vodi na kontradikciju.

Aritmetička sredina je dobar primjer metode koja ima odražava svojstvo *preferencijalne nezavisnosti* kriterija. Preciznije:

> ako dva studentska profila imaju istu vrijednost ocjene po nekom kriteriju onda se promjenom težine tog kriterija ne može promijeniti odnos preferencija u ukupnom poretku izračunatom na temelju svih kriterija.

## 2. Slaba preferencija

DEFINICIJA 2.1. Binarna relacija $\succcurlyeq$ na skupu $S$ je:

- refleksivna ako je $a \succcurlyeq a$,
- potpuna ako je $a \succcurlyeq b$ ili $b \succcurlyeq a$,

- simetrična ako $a \succcurlyeq b \implies b \succcurlyeq a$,
- antisimetrična ako $a \succcurlyeq b \implies b \not\succcurlyeq a$,
- tranzitivna ako $a \succcurlyeq b \;\&\; b \succcurlyeq c \implies a \succcurlyeq c$,

za svako $a, b, c \in S$. Za uređajnu relaciju kažemo da je ***slaba preferencija*** ako potpuna i tranzitivna. Za zadanu slabu preferenciju $\succcurlyeq$ definiramo relaciju ***stroge preferencije*** $\succ$

$$a \succ b \text{ ako i samo ako } a \succcurlyeq b \;\&\; b \not\succcurlyeq a$$

i relaciju ***indiferencije*** $\sim$

$$a \sim b \text{ ako i samo ako } a \succcurlyeq b \;\&\; b \succcurlyeq a.$$

ZADATAK 2.2. Dokazati da:

- $\sim$ je relacija ekvivalencije
- $a \succ b \;\&\; b \sim c \implies a \succ c$,
- $a \sim b \;\&\; b \succ c \implies a \succ c$,

za sve $a, b, c \in S$.

Relacija slabe preferencije na nekom skupu alternativa izražava racionalnu strukturu osobnih preferencija donosioca odluke. Donosilac odluke, kad izražava svoje osobne preferencije na velikom skupu alternativa može biti i nekonzistentan u smislu da njegove preferencije nisu tranzitivne. Ako te preferencije shvatimo kao usmjeren graf onda je inkonzistentnost ekvivalentna egistenciji pozitivnih/negativnih ciklusa u tom grafu. Sljedeći teorem govori o važnosti tranzitivnosti osobnih preferencija za njihovu numeričku reprezentaciju.

TEOREM 2.3 (Savage, 1954). *Neka je $\succcurlyeq$ relacija slabe preferencije na skupu $S$. Tada postoji funkcija $V : S \to \mathbb{R}$ koja je u skladu s relacijom tj.*

$$x \succcurlyeq y \quad \Leftrightarrow \quad V(x) \geq V(y). \tag{2.1}$$

DOKAZ. Definirajmo

$$V(x) = \#S(x)$$

gdje je $\#$ oznaka za broj elemenata skupa i $S(x) = \{y \in S \mid x \succcurlyeq y\}$ . Tada je $V$ tražena funkcija. Pretpostavimo da je $x \succcurlyeq y$. Tada je $S(y) \subseteq S(x)$ i skupovi $S(x)$ i $S(y)$ su jednaki ako je $x \sim y$, a $S(y)$ je strogi podskup od $S(x)$ ako je $x \succ y$ jer tada $S(y)$ sigurno ne sadrži element $x$. Time je dokazana nejednakost $V(x) \geq V(y)$.

Obratno, pretpostavimo da je $V(x) \geq V(y)$ i $x \not\succcurlyeq y$. To znači da je $y \succ x$ pa je prema prethodnoj tvrdnji $V(y) > V(x)$ što vodi na kontradikciju. $\square$

Funkcija $V$ iz teorema je jedna ordinalna skala na kojoj smo izmjerili elemente skupa $S$ i svaku funkciju $V$ koja je u skladu sa slabom preferencijom nazivamo ***ordinalnom funkcijom vrijednosti***. Funkcija vrijednosti nije jedinstvena što se vidi iz sljedećeg teorema.

TEOREM 2.4. *Neka je $V$ funkcija vrijednosti na $S$. Tada je $W$ funkcija vrijednosti na $S$ ako i samo ako je $W = h \circ V$ gdje je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija i $W = h \circ V$. Tada je

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow V(x) \geq V(y) \Leftrightarrow h \circ V(x) \geq h \circ V(y)$$

zbog monotonosti od $h$, što dokazuje usklađenost slabe preferencije i funkcije $W$. Obratno, neka su $W, V$ dvije funkcije vrijednosti na $S$. Tvrdimo da postoji strogo rastuća funkcija takva da je $W = h \circ V$. Definirajmo

$$h(V(x)) = W(x), \quad \forall x \in S.$$

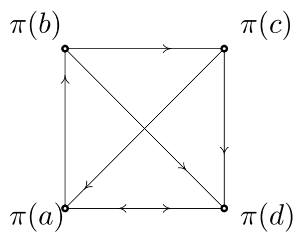
Funkcija $h$ je definirana na skupu $V(S)$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$. Tvrdimo da je strogo rastuća. U tu svrhu pretpostavimo da je $V(x) < V(y)$. Zbog usklađenosti $V$ i slabe preferencije ja tada $y \succ x$. Sad iskoristimo činjenicu da je $W$ funkcija vrijednosti što daje $W(y) > W(x)$ i dokazuje strogu monotonost od $h$. Jedino preostaje dokazati da se funkcija $h$ sa skupa $V(S)$ može proširiti na cijeli skup realnih brojeva tako da stroga monotonost ostane sačuvana. Taj detalj ostavljamo čitaocu. $\square$

ZADATAK 2.5. Zamislimo situaciju u kojoj je skup $S$ prebrojiv. Da li i tada vrijede teoremi 2.3 i 2.4?

U primjeru 1.2 vidjeli smo da srednja vrijednost nije uvijek dobar način za rangiranje kandidata. S tom napomenom u vidu, ispitivač je uzeo u obzir profil svakog kandidata i uspoređivao je profile, a ne pojedine ocjene. Njegovo je razmišljanje bilo više intuitivnog karaktera. Pokušajmo ga malo više formalizirati na način da konstruiramo relaciju dobivenu iz uspoređivanja po parovima na skupu profila

$$\mathcal{P} = \{\pi(a), \pi(b), \pi(c), \pi(d)\}.$$

Sve takve preferencije možemo slikovito prikazati usmjerenim grafom, v. sliku 1 u kojem strelica $\pi(a) \rightarrowtail \pi(b)$ znači da profil $\pi(b)$ preferiramo u osnosu na profil $\pi(a)$. Ekvivalenciju, u grafu, označavamo dvosmjernom strelicom $\pi(a) \leftarrowtail\!\!\rightarrowtail \pi(b)$. Po dogovoru smatramo da je $\pi(a) \leftarrowtail\!\!\rightarrowtail \pi(a)$ za svaki profil $\pi(a)$, ali to nećemo u grafu posebno označavati. Na temelju takvog usmjerenog grafa treba donijeti rang listu kandidata ako je to uopće




SLIKA 1. Graf preferencija

moguće. Inkonzistentnost se očituje u postojanju usmjerenog ciklusa u grafu, npr. u gornjem grafu je prisutan usmjeren ciklus

$$\pi(a) \rightarrowtail \pi(b) \rightarrowtail \pi(c) \rightarrowtail \pi(a).$$

Postojanje usmjerenih ciklusa narušava tranzitivnost relacije i nije moguće konstruirati funkciju vrijednosti prema teoremu 2.3 koja bi bila usklađena s relacijom. Jedan način modeliranja takvog problema koji bi opravdao nastavnikovo rangiranje je pomoću 'fuzzy' integrala. Drugi jednostavniji način je pomoću metode potencijala koju ćemo kasnije objasniti.

**2.1. Tablični zapis preferencija.** Preferencije donosioca odluke na skupu alternativa $S$ predstavljaju relaciju koja nije nužno relacija slabe preferencije. Preciziranje te relacije u praksi se naziva uspoređivanjem u parovima jer se za svaki par alternativa precizira kojoj se alternativi daje prednost, ili se iskazuje njihova ekvivalentnost. Te se preferencije mogu zapisati u matrici ili tablici preferencija na sljedeći način. Jednostavnosti radi označimo $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Tada u matrici preferencija $R$ pišemo

$$r_{ij} = \begin{cases} \times, & \text{ako je } i \succcurlyeq j \\ \bigcirc, & \text{ako je } j \succcurlyeq i \end{cases}$$

Očito je $r_{ii} = \otimes$ za svaki $i \in S$ jer je $i \succcurlyeq i$ i

$$r_{ij} = r_{ji} = \otimes \text{ ako i samo ako je } \; i \sim j.$$

Prema teoremu 2.3, ako je $\succcurlyeq$ relacija slabe preferencije onda je vrijednost funkcije vrijednosti $V(i)$ jednaka broju $\times$ u $i$-tom retku.

Tablica preferencija iz primjera s ocjenama 1.2 je dana u tabeli 2.1. Primijetite da je na dijagonali tablice $\otimes$ jer je relacija slabe preferencije refleksivna, tj. $p \succcurlyeq p$ za svaki $p \in \mathcal{P}$.

| | $\pi(a)$ | $\pi(b)$ | $\pi(c)$ | $\pi(d)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\pi(a)$ | $\otimes$ | $\bigcirc$ | $\times$ | $\otimes$ |
| $\pi(b)$ | $\times$ | $\otimes$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ |
| $\pi(c)$ | $\bigcirc$ | $\times$ | $\otimes$ | $\bigcirc$ |
| $\pi(d)$ | $\otimes$ | $\times$ | $\times$ | $\otimes$ |

TABLICA 2.1. Tablični zapis relacije iz slike 1.

## 3. O mjerenju

U apstraktnom smislu mjerenje na skupu $S$ je funkcija koja svakom elementu skupa $S$ pridjeljuje neku numeričku vrijednost. Uvriježeni termin za numeričku vrijednost obilježja kojeg mjerimo je statistika. Ljudi elementima skupa $S$ pridjeljuju obilježja (kvalitetu) i onda ta obilježja mjere. Tako na primjer, za svakog učenika iz nekog razreda možemo mjeriti njegovu visinu, težinu ili prosječan uspjeh iz matematike. Uočavanjem jednog obilježja elemenata skupa $S$ i mjerenjem istog omogućavamo analizu tog obilježja računanjem raznih statistika kao i usporedbe različitih skupova na temelju izračunatih statistika.

U odlučivanju je proces mjerenja nešto otežan jer mjerenje nije niti direktno niti egzaktno. Primjer direktnog mjerenja je mjerenje fizikalnih veličina kao što je mjerenje širine stola, mase nekog objekta ili zapremnine neke posude, gdje direktno uspoređujemo dvije veličine iste kvalitete.

Mjerenje sile je nešto složenije jer nju mjerimo dinamometrom koji mjeri relativno produljenje opruge i zatim, uvažavajući fizikalni odnos između sile i relativnog produljenja elastične opruge, izbacuje iznos izmjerene sile. Drugim riječima, mjerimo jednu fizikalnu veličinu i zatim izračunavamo drugu. To izračunavanje je ugrađeno u instrument i jedino što treba učiniti je dobro ga baždariti tj. odrediti mjernu skalu. U pozadini donošenja odluke je sličan proces. Mi uspoređujemo dvije alternative i jednoj od njih dajemo prednost $(A \succcurlyeq B)$.

Ako nije još sasvim jasno zbog čega je rangiranje alternativa indirektno onda se vratimo na početak i prisjetimo se našeg cilja. Cilj nam je rangirati alternative ali ih ne možemo direktno mjeriti nego to činimo tako da ih uspoređujemo prema nekom obilježju. Mjerimo intenzitet preferencije a zatim računamo rang ili vrijednost objakata pomoću neke metode. Direktno mjerenje uočenog obilježja, npr. zadovoljstvo kupnjom ili određivanje razine nezadovoljstva poslom je na prvi pogled teško izvedivo. Prihvatljivije je dati preferencije jednoj od dviju kupovina ili usporediti koji od dva uzroka nezadovoljstva na poslu ima veći utjecaj na psihičko stanje.

**3.1. Kvantitativna smislenost.** Funkcija vrijednosti definirana u teoremu 2.3 naziva se još i ***ordinalna funkcija*** ili ***ordinalna skala***. Teorem 2.4 tvrdi da je ordinalna skala jedinstvena do na kompoziciju sa strogo rastućom funkcijom. Slobodnije rečeno, strogo rastuće funkcije su dozvoljene transformacije ordinalne skale. Sljedeća lema pokazuje da pri manipuliranju s ordinalnom skalom moramo biti vrlo oprezni i ne donositi zaključke na temelju nedozvoljenih manipulacija.

LEMA 3.1. *Nejednakost između aritmetičkih sredina nije invarijantna na strogo rastuće transformacije. Drugim riječima, ako je $V$ ordinalna funkcija onda*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i V(a_i)$$

*ne povlači da za svaku strogo rastuću funkciju $h$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(V(a_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(V(a_i)),$$

*gdje je $\lambda_i, \mu_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*

Dokaz leme ostavljamo čitaocu. U knjizi French [**?**] mogu se naći interesantni primjeri iz svakodnevnog života kao i dokaz leme.

Gornja lema sugerira da se uvede pojam ***kvantitativne smislenosti*** neke tvrdnje.

DEFINICIJA 3.2. Za neku tvrdnju koja uključuje skalu kažemo da je kvantitativno smislena ako njezina vrijednost istinitosti ne ovisi o dozvoljenoj transformaciji skale.

Prethodna lema zaključuje da tvrdnja:

> *Srednja ordinalna vrijednost jedne grupe objekata je veća od srednje ordinalne vrijednosti druge grupe objekata.*

nije kvantitativno smislena. To znači da za ordinalne skale nema smisla uspoređivati njihove srednje vrijednosti. Za omjernu, intervalnu i apsolutnu skalu međutim, to ima smisla. Ako je $V$ ordinalna skala i $h$ strogo rastuća transformacija tada je jedina kvantitativno smislena tvrdnja:

$$V(a) \geq V(b) \Leftrightarrow h(V(a)) \geq h(V(b)).$$

3.1.1. *Klasifikacija skala.* Poznavajući skup dozvoljenih transformacija, skale možemo klasificirati na sljedeći načina:

**Ordinalna skala:** Dozvoljene transformacije čine skup strogo rastućih funkcija. Ordinalna funkcija vrijednosti je jedan primjer ordinalne skale.

**Intervalna skala:** Dozvoljene transformacije čine skup svih pozitivnih afinih transformacija. To su transformacije oblika

$$h(t) = \alpha t + \beta, \quad \alpha > 0, t \in \mathbb{R}.$$

Primjer takve skale je izmjeriva funkcija vrijednosti, aditivna funkcija vrijednosti i potencijal. Temperatura se mjeri intervalnom skalom ako zaboravimo apsolutnu nulu.

**Omjerna skala:** Dozvoljene transformacije čine skup svih transformacija sličnosti. To su transformacije oblika

$$h(t) = \alpha t, \quad \alpha > 0.$$

Primjer takve skale je linearna funkcija vrijednosti, mjerenje težine također spada u tu vrstu skale.

**Apsolutna skala:** Jedina dozvoljena transformacija je identiteta, tj. $h(t) = t, \ \forall t \in \mathbb{R}$. Primjer takve skale je vjerojatnost na nekom skupu.

**3.2. Kvalitativna smislenost.** Neka tvrdnja može biti kvantitativno smislena ali je i dalje 'besmislena' za korisnika ako ne odražava neki kvalitativni, substancijalni smisao. To prvenstveno znači da tvrdnja koja nastoji biti kvalitativno smislena mora prvo biti kvantitativno smislena. Tako na primjer, za potencijal $X$ definiran na čvorovima usmjerenog grafa razlika potencijala ima kvantitativni smisao ali ako je ta razlika takva da je u skladu s nekom relacijom slabe preferencije onda tvrdnja

$$X(a) \geq X(b), \alpha = (b, a) \in \mathcal{A}$$

postaje kvalitativno smislena jer odražava jedan kvalitativni odnos među čvorovima, a to je prisutan uređaj slabe preferencije. Razlika između kvantitativne i kvalitativne smislenosti je vrlo subtilna i najbolje ju je pojasniti primjerom.

## 4. Izmjerivost. Racionalna teorija odlučivanja

U osnovi konstrukcije funkcije vrijednosti je relacija slabe preferencije. Na prvi pogled izgleda razumno reći da donosilac odluke preferira $a$ u odnosu na $b$ više nego nego što preferira $c$ u odnosu na $d$ ako i samo ako je više spreman odustati od $b$ u zamjenu za $a$ nego odustati od $d$ u zamjenu za $c$.

Označimo s $(a \leftarrow b)$ prihvaćanje $a$ u ***zamjenu*** za $b$ ili kraće zamjena. Donosilac odluke sada ima dvije relacije slabe prefferencije s kojima se mora suočiti, jedna je relacija $\succcurlyeq$na objektima, a druga je relacija $\succcurlyeq_e$na zamjenama. Svaka relacija za sebe generira funkciju vrijednosti s napomenom da je prva definirana na skupu objekata, a druga na skupu zamjena. Nas interesira njihova usklađenost, odnosno odgovor na pitanje je li moguće naći takvu funkciju vrijednosti $v$ na skupu objekata $S$ koja zadovoljava:

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b) \tag{4.1}$$

$$(a \leftarrow b) \succcurlyeq_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d). \tag{4.2}$$

Takvu funkciju, ako postoji, zvati ćemo ***izmjerivom*** funkcijom vrijednosti. Očito je $v$ ordinalna funkcija vrijednosti, dok (4.2) zahtijeva da je razlika $v(a) - v(b)$ ordinalna funkcija vrijednosti na skupu zamjena usklađena s $\succcurlyeq_e$.

TEOREM 4.1. *Sljedeći aksiomi su nužni i dovoljni za egzistenciju izmjerive funkcije vrijednosti:*

**Aksiom 4.1.1.** *(Slabi uređaj) Relacija $\succcurlyeq$je relacija slabe preferencije na skupu objekata, a relacija $\succcurlyeq_e$je relacija slabe preferencije na skupu zamjena.*

**Aksiom 4.1.2.** *(Usklađenost $\succcurlyeq$ i $\succcurlyeq_e$)* $\forall a, b \in S$

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow (a \leftarrow b) \Leftrightarrow \succcurlyeq_e (c \leftarrow c) \quad \forall c \in S.$$

**Aksiom 4.1.3.** *(Inverzija)* $\forall a, b, c, d \in S$

$$(a \leftarrow b) \succcurlyeq_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow (d \leftarrow c) \succcurlyeq_e (b \leftarrow a).$$

**Aksiom 4.1.4.** *(Konkatenacija)* $\forall a, b, c, d, e, f$

$$\left.\begin{array}{l}(a \leftarrow b) \succcurlyeq_e (d \leftarrow e)\\(b \leftarrow c) \succcurlyeq_e (e \leftarrow f)\end{array}\right\} \implies (a \leftarrow c) \succcurlyeq_e (d \leftarrow f).$$

**Aksiom 4.1.5.** *(Rješivost)* $\forall b, c, d \in S \; \exists a \in S$ *tako da je*

$$(a \leftarrow b) \sim_e (c \leftarrow d).$$

$\forall b, c \in S \; \exists a \in S$ *tako da je*

$$(b \leftarrow a) \sim_e (a \leftarrow c).$$

**Aksiom 4.1.6.** *(Arhimedovost) Svaki strogo omeđeni standardni niz je konačan.*

DOKAZ. bit će $\square$

4.0.1. *Jedinstvenost izmjerive funkcije vrijednosti.* Ordinalna funkcija vrijednosti jedinstvena je do na strogo rastuće transformacije, v. teorem 2.3. Izmjeriva funkcija zadovoljava više zahtjeva od ordinalne pa je za očekivati da klasa dozvoljenih transformacija bude manja. Jedno je očigledno, ako je $\phi(t) = \alpha t + \beta$, $\alpha > 0$, onda je kompozicija $\phi \circ v$ također izmjeriva funkcija vrijednosti jer je

$$\begin{aligned} v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d) &\Leftrightarrow \alpha\big(v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d)\big) \\ &\Leftrightarrow \phi(v(a)) - \phi(v(b)) \geq \phi(v(c)) - \phi(v(d)) \end{aligned}$$

i očigledno je zadovoljen zatjev (4.2) za kompoziciju $\phi \circ v$. Pitanje je vrijedi li obrat. Sljedeći primjer pokazuje da to nije istina.

PRIMJER 4.2. Neka je $S = \{a, b, c\}$ i pretpostavimo da vrijedi:

$$a \succ c \succ b \succ c; \quad (a \leftarrow c) \succ_e (a \leftarrow b) \succ_e (b \leftarrow c).$$

Tada su $v(a) = 10, v(b) = 3, v(c) = 0$ i $w(a) = 12, w(b) = 4, w(c) = 0$ izmjerive funkcije vrijednosti povezane strogo rastućom funkcijom $\phi(10) = 12, \phi(3) = 4, \phi(0) = 0$ koja nije afina transformacija gorjeg tipa jer

$$\frac{12-4}{10-3} \neq \frac{3-0}{4-0}.$$

Sljedeći teorem pokazuje da jedinstvenost izmjerive funkcije do na pozitivnu afinu transformaciju zahtijeva izvjesno bogatstvo skupa $S$.

TEOREM 4.3. *Pretpostavimo da je ispunjen zahtjev slabe rješivosti:* $\forall a, b, c \in S\ \exists x \in S$ *tako da je*

$$(x \leftarrow c) \sim_e (a \leftarrow b).$$

*Tada je izmjeriva funkcija vrijednosti jedinstvena do na pozitivnu afinu transformaciju. Drugim riječima, ako su $v$ i $w$ dvije izmjerive funkcije vrijednosti onda postoje realni brojevi $\alpha > 0$ i $\beta$ tako da je*

$$w(a) = \alpha v(a) + \beta \quad \forall a \in S.$$

**4.1. Kvalitativna i kvantitativna smislenost.** Neka je $S$ zadani konačan skup $v : S \to \mathbb{R}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$. Lako se vidi da

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i v(a_i)$$

ne implicira da je za svaku strogo rastuću funkciju $\phi$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(v(a_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \phi(v(a_i)).$$

Posljedica toga je da srednja vrijednost ordinalne funkcije vrijednosti nije invarijantna na rastuće transformacije skale. Drugim riječima, kvantitativne operacije s ordinalnim vrijednostima nisu smisleni pokazatelji na kojima se mogu bazirati bilo kakvi zaključci. Iz gornje činjenice možemo izvesti još jedan zaključak, a taj je da uređaj među razlikama ordinalnih vrijednosti također nije sačuvan, drugim riječima:

$$v(a_1) - v(a_2) \geq v(a_3) - v(a_4)$$

ne implicira da je za svaku strogo rastuću funkciju $\phi$,

$$\phi(v(a_1)) - \phi(v(a_2)) \geq \phi(v(a_3)) - \phi(v(a_4)).$$

Ta je tvrdnja specijalan slučaj prethodne ako specificiramo

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1 \text{ i } \lambda_i = 0 \text{ za prostale vrijednosti indeksa } i;$$
$$\mu_3 = 1;\ \mu_4 = 1 \text{ i } \mu_i = 0 \text{ za prostale vrijednosti indeksa } i.$$

Ovdje je zgodan trenutak da se objasni pojam ***kvalitativne*** i ***kvantitativne*** smislenosti neke tvrdnje. Tvrdanja je kvantitativno smislena ako je invarijantna na dozvoljene transformacije skale. Za ordinalnu funkciju vrijednosti dozvoljene transformacije su kompozicije sa strogo rastućim funkcijama. Uspoređivanje aritmetičkih sredina dviju ordinalnih funkcija vrijednosti nije kvantitativno smisleno. Kvalitativna smislenost je fundamentalniji pojam. Ona zahtijeva od donosioca odluke da jasno razumije kvalitativne odnose izražene relacijama $\succcurlyeq$ i $\succcurlyeq_e$ na primjer. Sljedeći primjer pokazuje važnost razumijevanja odnosa među zamjenama.

PRIMJER 4.4. Pretpostavimo da je $S = \{a, b, c, d\}$ skup sljedećih scenarija:

a – savršenog ste zdravlja i dobili ste 50000 kn na lotu
b – savršenog ste zdravlja i dobili ste 49999 kn na lotu
c – lošeg ste zdravlja, bez bolova. Nemate neka velika očekivanja od života. Niste dobili dobitak na lotu.
d – umirete s teškim bolovima, ostalo vam je još 48 sati života.

Većina će se složiti da je skok u 'kvaliteti življenja' veći na zamjeni $(c \leftarrow d)$ nego u zamjeni $(a \leftarrow b)$. Očigledno je dakle $(c \leftarrow d) \succcurlyeq_e (a \leftarrow b)$. Ali ako pitamo koju bi zamjenu najradije odabrali ljudi uglavnom odgovaraju: $(a \leftarrow b)$, što je posljedica njihove fiksiranosti na stanje, tj. oni bi radije završili u stanju $a$ nego u stanju $c$.

To je tipična greška da ljudi kod uspoređivanja zamjena uspoređuju rezultat zamjene, a ne same zamjene. Vidi također zadatak 5.1.

**4.2. Deskriptivni modeli odlučivanja.** U našem izlaganju mi ćemo uglavnom opisivati kako bi 'racionalan' donosilac odluke trebao odlučivati. Sociolozi i psiholozi proučaju i deskriptivne modele tj. kako ljudi donose odluke u stvarnosti, gdje i u kojoj mjeru odstupaju od normativnog modela i pokušavaju objasniti zašto je to tako. Deskriptivni modeli se doista razlikuju od normativnih koji su naš glavni interes. Ovdje ćemo ukratko opisati neke od tih modela i uputiti zainteresiranog čitaoca na literaturu iz tog područja. Mi ćemo kratko opisati dva osnovna tipa descriptivnih modela, jedan baziran na ***poluuređaju*** s drugi baziran na ***stohastičkoj*** preferenciji.

4.2.1. *Poluuređaj i intervalni uređaj.* Empirički gledano jedan od glavnih problema u odlučivanju je intranzitivnost relacije indiferencije $\sim$. To je posljedica neodlučivosti donosioca odluke da razlikuje situacije karakterizirane bliskim vrijednostima nekih parametara. Tako na primjer, ako u kavu dodamo žličicu šećera osjetiti ćemo razliku u slatkoći, ako dodamo jedno zrno šećera to će biti znatno teže. Ako s $v$ označimo koncentraciju šećera u kavi onda će donosilac odluke moći kvalitativno razlikovati te koncentracije ako se dovoljno razlikuju numerički tj.

$$a \mathrm{\ P\ } b \Leftrightarrow v(a) > v(b) + \delta \tag{4.3}$$

za neku konstantu $\delta > 0$. Ako je razlika koncentracija manja onda je indiferentan tj.

$$a \mathrm{\ I\ } b \Leftrightarrow v(b) - \delta \leq v(a) \leq v(b) + \delta \tag{4.4}$$

Ovo je samo primjer i motivacija za definiciju aksiomatske definicije poluuređaja.

DEFINICIJA 4.5. Relaciju P nazivamo ***puluuređajem*** ako zadovoljava sljedeće zahtjeve

**Aksiom 4.5.1.** P je antirefleksivna, tj. $\forall a \in S \ a \not\mathrm{P} \ a$.

**Aksiom 4.5.2.** $\forall a, b, c, d \in S$

$$(a \mathrm{\ P\ } b \ \&\ b \mathrm{\ P\ } c) \implies \text{ili } a \mathrm{\ P\ } d \text{ ili } d \mathrm{\ P\ } c \text{ ili oboje}.$$

**Aksiom 4.5.3.** $\forall a, b, c, d \in S$

$$(a \mathrm{\ P\ } b \ \&\ c \mathrm{\ P\ } d) \implies \text{ili } a \mathrm{\ P\ } d \text{ ili } c \mathrm{\ P\ } b \text{ ili oboje}.$$

**Aksiom 4.5.4.** (Konzistentnost I i P ) $\forall a, b \in S$

$$a \mathrm{\ I\ } b \Leftrightarrow a \not\mathrm{P}\ b \text{ i } b \not\mathrm{P}\ a.$$

Nije sasvim jasno što aksiomi 4.5.1–3 govore pa je dobro ilustrirati to na kvantitativnoj reprezentaciji. Neka su $a, b, c$ takvi da je $a \mathrm{\ P\ } b \ \&\ b \mathrm{\ P\ } c$. Intervali $[v(b), v(a)]$ i $[v(c), v(b)]$ oba imaju duljinu koja je veća od $\delta$. Prema aksiomu 4.5.2 ne postoji točka $v(d)$ na udaljenosti manjoj od $\delta$ od

$v(a)$ i $v(c)$. Da bi razumjeli što tvrdi aksiom 4.5.3 pretpostavimo $a \mathrm{~P~} b$ i $c \mathrm{~P~} d$. Tada je $v(a) > v(b) + \delta$ i $v(c) > v(d) + \delta$. Dvije su mogućnosti sada, $v(a) \geq v(c)$ ili $v(c) \geq v(a)$ (ili obje). Tada

$$v(a) \geq v(c), v(c) > v(d) + \delta \implies v(a) > v(d) + \delta \Leftrightarrow a \mathrm{~P~} d$$
$$v(c) \geq v(a), v(a) > v(b) + \delta \implies v(c) > v(b) + \delta \Leftrightarrow c \mathrm{~P~} b.$$

PROPOZICIJA 4.6. *Ako* $\mathrm{P}$ *i* $\mathrm{I}$ *zadovoljavaju zahtjeve* 4.5.1–4 *onda je* $\mathrm{P}$ *antisimetrična i tranzitivna, a* $\mathrm{I}$ *je simetrična i refleksivna.*

DOKAZ. Dokazujemo tranzitivnost relacije $\mathrm{P}$. Pretpostavimo da je $a \mathrm{~P~} b \;\&\; b \mathrm{~P~} c$. Prema aksiomu 4.5.2, ako specificiramo $d = c$, onda je $a \mathrm{~P~} c$ ili $c \mathrm{~P~} c$ ili oboje. Kako je mogućnost $c \mathrm{~P~} c$ isključena zbog aksioma 4.5.1 to je $a \mathrm{~P~} c$ što dokazuje tranzitivnost od $\mathrm{P}$.

Antisimetričnost relacije $\mathrm{P}$. U suprotnom je $a \mathrm{~P~} b \;\&\; b \mathrm{~P~} a$ pa prema aksiomu 4.5.3 slijedi $a \mathrm{~P~} a$ ili $b \mathrm{~P~} b$ što je u suprotnosti s aksiomom 4.5.1.

Simetričnost relacije I slijedi direktno iz njene definicije, dok je njena refleksivnost direktna posljedica aksioma 4.5.1. □

TEOREM 4.7. *Aksiomi* 4.5.1–4 *su nužni i dovoljni za kvantitativnu reprezentaciju* (4.3) *i* (4.4) *uz pretpostavku da je* $S$ *konačan skup.*

DOKAZ. Vidi, Roberts [**31**]. □

Koncept poluuređaja može se i oslabiti na ***intervalni uređaj***. To je uređaj koji koji zadovoljava aksiome 4.5.1 i 4.5.3; dakle, nema zahtjeva da zadovoljava aksiom 4.5.2. Poluuređaj je intervalni uređaj ali obrnuto ne vrijedi. Kvantitativna reprezentacija intervalnog uređaja je sljedeća: postoje dvije funkcije $v$ i $\delta$ takve da je $\delta(a) > 0 \; \forall a \in S$ i

$$a \mathrm{~P~} b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b) + \delta(b).$$

Oba uređaja opisuju istu ideju, tj. dva objekta se razlikuju ako je jedan dovoljno bolji od drugoga, s tim da je $\delta$ konstanta kod poluuređaja i ovisi o $b$ kod intervalnog uređaja. Detaljnije o intervalnom uređaju može se naći u knjizi Fishburn [**14**] i Roberts [**31**].

4.2.2. *Stohastička preferencija.* Ako vam je ponuđen izbor između banane i jabuke u više navrata hoćete li uvijek birati bananu ili ćete katkad birati bananu a katkad jabuku ovisno o raspoloženju. Za većinu ljudi nema pravila i to je situacija koja inspirira drugu klasu descriptivnnih modela, ***stohastički model*** preferencije.

Svakom paru objekata iz $S$ ovaj model pridružuje vjerojatnost $p_{ab}$ koja se interpretira kao naklonost donosioca odluke da izabere $a$ ako mu je ponuđen izbor između $a$ i $b$. Tako na primjer, ako je $p_{ab} = 0.6$ onda je time izražena spremnost donosioca odluke da u 60% slučajeva izabere $a$, ako mu je ponuđen izbor između $a$ i $b$. Pri tome je razumno zahtijevati da da se izbor jedne od ponuđene dvije alternative mora izvršiti tj.

$$p_{ab} + p_{ba} = 1,$$

uz dogovor $paa = \frac{1}{2}$. Pitanje je da li u pozadini zadanih vjerojatnosti $p_{ab} \mid a, b \in S$ stoji neka struktura. Ako je vjerojatnost $p_{ab} \geq \frac{1}{2}$ onda tu informaciju možemo interpretirati kao preferiranje alternative $a$ u odnosu na alternativu $b$ od strane donosioca odluke. Razumno je definirati relaciju

$$a \succcurlyeq b \iff p_{ab} \geq \frac{1}{2}$$

i pitati se za njenu tranzitivnost. Ako su preferencije donosioca odluke dovoljno strukturirane onda, v. teorem **??**, onda postoji kvantitativna reprezentacija stohastičke preferencije u obliku

$$p_{ab} = \frac{V(a)}{V(a) + V(b)}$$

za neku realnu funkciju $V$ na skupu alternativa. Tada je $V(a)$ 'apsolutna prihvatljivost od $a$', a $p_{ab}$ 'relativna prihvatljivost od $a$' u ozboru $a$ ili $b$. Odličan pregled probabilističkih modela dan je u knjizi Roberts, [**31**].

## 5. ZADACI

ZADATAK 5.1. Ponuđen vam je na izbor ručak u finom restoranu ili, kao alternativa, dvije karte za kazalište. Vi ste neodlučni i osoba koja vam to nudi daje i vašu omiljenu čokoladu kao ekstra ponudu na karte. Da su u pitanju karte i karte s čokoladom vi biste naravno odabrali karte s čokoladom. Jeste li i dalje neodlučni, diskutirajte nastalu situaciju.

**5.1. Qualifications.** It is said that the day you feel a dispassion (nepristran) for the mundane pleasure of life, and a yearning (žudnja) for spiritual life, you should take sannyasa. And the day you awaken to a higher sense for discrimination (razlikovanje), you should become a karma sannyasin. Discrimination and dispassion are two jewels which every spiritual aspirant should try to cultivate.

Just as there is higher and lower discrimination, there is higher and lower dispassion. Lower dispassion results in detachment towards external life, external pleasures. Out of that arises a higher dispassion which is detachment towards the inner emotions, such as like and dislike, joy and sorrow, and all the dualities of life.

Lower discrimination is that faculty which determines our sense of taste, touch, smell, sound and sight. For instance, we discriminate between certain foods, certain music, certain films. We prefer certain people, situations, events and circumstances, according to our level of discrimination. One person may prefer to spend most of his spare time listening to satsang or reading books on yoga and higher philosophy, while another may prefer to watch television or go to a party.

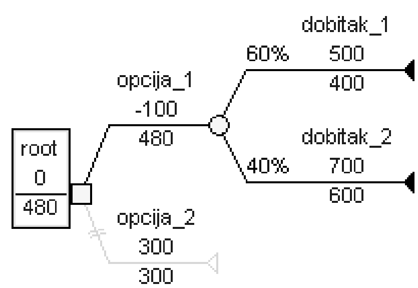
Some may discriminate between foods they eat and only take those which are conductive to their health, while others will eat just anything. This is lower discrimination for, after all, even an animal has discrimination for food. If you give him food which is alien (strana) to his nature, he will simply sniff at it and turn his head away. Each person chooses according to his level of discrimination. This lower discrimination, if experienced in daily life, ultimatively gives rise to higher discrimination. Man has the inherent power to reason. It is this faculty which distinguishes him from animals, plants and other living creatures, and it is this which leads him to higher discrimination.

Higher discrimination arises out of self-study and self analysis. At times, you try to asses your values, principles and motivation in life. It is when you begin to realize that the purpose of life is far deeper and nobler than just eating, sleeping and procreating, that you are ready for karma sannyasa. Then you begin to reassess and re-evaluate your contribution to life and to your own growth, and you find that it is severely lacking (nestašica, manjak). You find that your extrovert nature has inhibited (spriječiti) the infinite potential of your inner being.

Ordinarily you act on the basis of the senses which feed you information, and according to your likes and dislikes, you respond. But there is another faculty within you, which is the source of indirect knowledge or intuition. And this is the basis of higher discrimination. If you are able to tap this source, you will have unearthed (pronaći, iščešrkati, otkriti) an extremely valuable asset (imovina, vrijednost). Then, no mater who or what you are, you will shine in your particular area of life.

## 6. Stablo odlučivanja

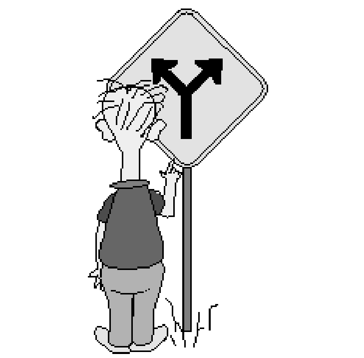
Stablo odlučivanja koristimo kad treba odabrati jednu od mogućih akcija (poteza) u riskantnim situacijama. Mnoge poslovne odluke upadaju u tu kategoriju. Na primjer, proizvođač mora prvo proizvesti proizvod da bi precizno znao kakva je potražnja. Advokat mora izabrati između parnice i vanparnične nagodbe. Burzovni mešetar mora odlučiti da li da kupi dionice ne; po kojoj cijeni će ih prodati to unaprijed ne može znati. U svim tim situacijama donosilac odluke je suočen s rizičnom odlukom jer nije u stanju pecizno predvidjeti buduće okolnosti koje utječu na njen ishod. I bez obzira na to donosilac odluke ima neko znanje o tome koje su moguće situacije i učestalost njihovog pojavljivanja. Ta se informacija može iskoristiti za izbor opcije koja ima najveće očekivanje povoljnog dobitka. Stablo odlučivanja uzima u obzir sve pojedinosti i jednostavno je za razumijevanje. Dijagram ilustriran na slici 2 nazivamo stablo odlučivanja. Čita se s lijeva




SLIKA 2. Stablo odlučivanja

na desno. Čvor sasvim lijevo nazivamo korijenom stabla ili *čvorom odluke* (eng. root); označavamo ga kvadratićem. Grane koje izlaze iz čvora odluke predstavljaju moguće alternative. Samo jednu od njih je moguće odabrati. Nazvali smo ih `opcija_1` i `opcija_2`. Svaka opcija ima svoju vrijednost (čisti dobitak ili ulog) koji su posljedice izbora te opcije. Te brojeve upisujemo iznad crte i lijevo od sljedećeg čvora. Vrijednost prve opcije je $-100$ što znaži da toliko iznose troškovi izbora te opcije. Vrijednost druge opcije iznosi 300 i to je čisti dobitak ako odaberemo tu opciju.

Čvorove prikazane kružićima nazivamo *čvorom izbora* što izražava mogućnost izbora daljnjih opcija iz tog čvora. U primjeru je samo jedan takav čvor. Iz izbornog čvora idu nove grane i svakoj od njih je pridružena vjerojatnost njenog izbora. Postotak desno od izbornog čvora je vjerojatnost grane izražena u postocima. Čvor druge opcije nije izboran nego



SLIKA 3. Izborni čvor.

je `terminalan` ili krajnji čvor. Isplata pridružena terminalnom čvoru jednaka je čistom dobitku umanjenom za izbor grane koja vodi do tog čvora. Isplata na terminalnom čvoru `ishod_1` kod prve opcije iznosi $500 - 100 = 400$ što je razlika između čistog dobitka i troškova izbora grane `opcija_1`.

Odluka se provodi tako da se svakoj grani koja izlazi iz korijena pridruži neka vrijednost i onda se odabere ona grana koja ima povoljniju vrijednost. Opciji dva pridružena je vrijednost isplate 300 na njenom terminalnom čvoru. Vrijednost prve opcije, koja vodi na izborni čvor, izračunati ćemo tako da računamo očekivanu vrijednost svih opcija koje izlaze iz tog čvora uvažavajući vjerojatnosti tih opcija. Prema tome, vrijednost prve opcije jednaka je

$$0.60 \cdot 400 + 0.40 \cdot 600 = 480$$

i zapisana je ispod troškova za tu opciju.

Kod složenijih stabala

## 7. Teorija izbora

Grupno odlučivanje je najsloženiji oblik donošenja odluke. U principu se ono ne razlikuje od vešekriterijske odluke osim u organizaciji hijerarhije i redosljedu izvođenja pojedinih koraka u odlučivanju.

Početkom grupnog odlučivanja, i odlučivanja uopće, može se smatrati Bordina kritika pravila većine kod izbora za Francusku akademiju znanosti 1784. godine. Već sljedeće godine Condorcet nalazi zamjerke Bordinoj metodi i od tada ne prestaju prepiske i rasprave o metodama sve do sredine prošlog stoljeća kad se Teorija odlučivanja formira kao matematička disciplina. Umjesto da pronalaze nove metode matematičari su počeli zasnivati kriterije (aksiome) koje bi 'pravedna' procedura za odlučivanje trebala zadovoljavati s naglaskom na 'demokraciju'. Demokratičnost je došla pod upitnik kad je Keneth Arrow (1951) dokazao svoj poznati 'impossibility teorem'.

**7.1. Pravilo većine.** Promatrajmo primjer u kojem 23 glasača treba izabrati jednog od tri kandidata na temelju javnog/tajnog izjašnjavanja svakog glasača o njegovom izboru. Pretpostavimo da je 9 glasača izabralo kandidata $a$, 6 glasača glasalo je za $b$ i 8 glasača za $c$. Ako prihvatimo pravilo da je pobjednik onaj od kandidata koji je dobio najviše glasova onda je to $a$.

Pogledajmo taj izbor iz druge perspektive. Većina[1] glasača, njih $6 + 8 = 14$ bi radije vidjelo nekog drugog kao pobjednika umjesto $a$. Ta primjedba dovodi u sumnju pravednost gornjeg izbora i Borda predlaže metodu koja se bazira na sumi rangova, kasnije nazvana po njemu. On predlaže da svaki glasač na glasački listić ispiše svoju rang listu kandidata na način kao što je to učinjeno u tablici 7.1. U tablici smo već organizirali rangiranja po broju jednakih: 5 glasača dalo je poredak $a \succcurlyeq b \succcurlyeq c$, 4 glasača poredak $a \succcurlyeq c \succcurlyeq b$ itd. Broj od 9 prvih mjesta dobio je kandidat $a$, 6 prvih mjesta dobio je kandidat $b$ i 8 prvih mjesta dobio je kandidat $c$ kao što smo već ranije ustanovili. Bordino pravilo je jednostavno: za osvojeno prvo

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. mjesto | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $c$ |
| 2. mjesto | $b$ | $c$ | $a$ | $c$ | $b$ |
| 3. mjesto | $c$ | $b$ | $c$ | $a$ | $a$ |
| Broj glasača | 5 | 4 | 2 | 4 | 8 |

TABLICA 7.1. Grupni profil glasanja.

[1] Pod većinom podrazumijevamo podskup od 51% glasača ili više.

mjesto, na svakom glasačkom listiću, kandidat dobiva 2 boda, za osvojeno drugo mjesto dobiva 1 bod i 0 bodova za posljednje mjesto. Da je bilo $n$ kandidata onda bi osvojeni bodovi bili $n-1$ za prvo mjesto, $n-2$ za drugo itd. Suma bodova za svakog kandidata je

| Kandidat | Bodovi |
|---|---|
| $a$ | $2 \cdot (5+4) + 1 \cdot 2 = 20$ |
| $b$ | $2 \cdot (2+4) + 1 \cdot 8 = 25$ |
| $c$ | $2 \cdot 8 + 1 \cdot (4+4) = 24$ |

što jednoznačno odlučuje o Bordinom pobjedniku, to je $b$. Primjenom Bordinog pravila, prijašnji pobjednik $a$ je sada pao na posljednje, treće mjesto. Napomenimo da Bordino pravilo dozvoljava da dva ili više kandidata zauzimaju isti rang na glasačkom listiću.

Detaljnija analiza rezultata glasovanja u tablici 7.1 ukazuje da većina glasača, njih 12, bi radije da $c$ bude na prvom mjesto umjesto $b$. To je navelo Condorcet-a (1785) da predloži metodu baziranu na kolektivnom uspoređivanju u parovima. Njegov je prijedlog da se promatra broj $v(x,y)$ glasača koji u svojim glasačkim listićima preferiraju $x$ u odnosu na $y$. Kažemo da je $x$ ***društveno preferiran*** prema $y$ ako je

$$v(x,y) \geq v(y,x).$$

U našem primjeru je $v(b,a) = 14$, $v(c,b) = 12$ i $v(c,a) = 12$. U prethodnim usporedbama u parovima, $c$ u svakom slučaju ima većinu glasova za sebe, više od 50%, i poredak socijalne preferencije je

$$c \succ b \succ a.$$

Kandidata $c$ nazivamo ***Condorcetovim pobjednikom***. Graf socijalne preferencije ne daje uvijek Condorcetovog pobjednika, tako na primjer za profil grupe dan u sljedećoj tabeli graf socijalne preferencije ima ciklus i takva se situacija naziva *Effet Condorcet* ili *Condorcetov efekt*.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $a$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $c$ | $a$ | $a$ |
| 3 | 1 | 1 | 2 |

TABLICA 7.2. Condorcetov efekt.

**7.2. Medijan.** Primjer u tablici 7.2 pokazuje da Condorcetova procedura ne daje uvijek pobjednika. Kemeny (1959) je postavio jedan model grupne odluke zasnovan na varijacionom pristupu. Da bismo ga opisali formalizirajmo malo našu diskusiju.

Grupu donosilaca odluke označimo s $G = \{1, \ldots, n\}$ i pretpostavimo da svaki od članova grupe donosi svoj uređaj slabe preferencije $\succcurlyeq_i$, $i \in G$ na konačnom skupu alternativa $A$. Problem grupne odluke[2] sastoji se u tome da se traži uređaj slabe preferencije $\succcurlyeq_G$ na skupu alternativa koji ćemo zvati ***konsenzusom***[3] i koji kao ulazne podatke koristi sve relacije $\succcurlyeq_i$, $i \in G$. Uređenu $n$-torku slabih preferencija $\pi = (\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n)$ nazivamo profilom grupe, a konsensus je funkcija $\mathcal{C}_A : \pi \mapsto \succcurlyeq_G$,

$$\mathcal{C}_A : \mathcal{P}_A^n \to \mathcal{P}_A$$

definirana na skupu svih mogućih profila u skup svih slabih preferencija $\mathcal{P}_A$ na skupu alternativa $A$.

Za zadani grupni profil $\pi = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ linearnih uređaja na $A$, ***Kemenyjev medijan*** je takav linearan uređaj $\rho$ koji minimizira sumu

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(\rho, \rho_i),$$

gdje je $\delta(\rho_i, \rho_j) = \#(\rho_i \cup \rho_j) - \#(\rho_i \cap \rho_j)$ udaljenost simetrične razlike među relacijama. Kemenyjev medijan uređaj uvijek postoji za razliku od Condorcetovog pobjednika.

Kemenyjev medijan je u uskoj vezi s Condorcetovim pravilom što se vidi iz sljedeće diskusije. Ako je kardinalni broj grupe donosioca odluke $G$ neparan onda je Condorcetovo pravilo, označimo ga s $\mathcal{C}$, definirano s:

$$x\mathcal{C}(\pi)y \Leftrightarrow v(x, y) \geq v(y, x)$$

ili, što je ekvivalentno

$$\Leftrightarrow v(x, y) > (\#G)/2.$$

Za očekivati je da će broj neslaganja svakog luka u Condorcetovom grafu s profilom grupe biti minimalan upravo zbog pravila većine. Možda je

[2]u žargonu 'procedure donošenja grupne odluke'

[3]Ostali nazivi su: 'grupna odluka', 'socijalna preferencija', 'statut'.

razumljivije ako to izrazimo formulom

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\#G}\delta(\rho,\rho_i) &= \sum_{i=1}^{\#G}\sum_{\substack{x\rho y\\ x\neg\rho_i y}} 1 + \sum_{i=1}^{\#G}\sum_{\substack{x\neg\rho y\\ x\rho_i y}} 1\\ &= \sum_{i=1}^{\#G}\sum_{\substack{x\rho y\\ y\rho_i x}} 1 + \sum_{i=1}^{\#G}\sum_{\substack{x\neg\rho y\\ x\rho_i y}} 1\\ &= \sum_{x\rho y} v(y,x) + \sum_{x\neg\rho y} v(x,y)\\ &= 2\sum_{x\rho y} v(y,x).\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{C}(\pi)$ jedinstveno rješenje problema minimizacije

$$\min_{\rho\in\mathcal{P}_A}\sum_{i=1}^{\#G}\delta(\rho,\rho_i).$$

U slučaju da je kardinalni broj grupe $G$ paran može se desiti, kao što smo to vidjeli u prethodnom primjeru, da Condorcetov pobjednik ne postoji, dok medijan postoji ali nije jedinstven. Ostavljamo čitaocu da sam provjeri navedene tvrdnje.

Veza izmedu medijana i Condorcetovog pravila uočena je u članku Barbut [**1**] (1967). Kemenyjev medijan vezan je takoder uz poznati *feedback arc set problem* (FAS) koji je $NP$-potpun, v. Karp (1972) [**?**]. Jedan drugi pokušaj da se spasi Condorcetova procedura je prikazana u knjizi Dogson [**?**] (1976), v. takoder Barthélémy [**?**] (1989).

**7.3. Taktizirano glasovanje.** Pogledajmo ješ jedan primjer situacije gdje pravilo većine omogućava taktiziranje kod izbora kji se vrše u 'dva kruga'. Pretpostavimo da grupa $G$ ima tri člana i da su individualne preferencije dane sljedećom tablicom. Pravilo većine vodi na intranzitivnu

$$\begin{array}{ccc} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\\ \hline 1 & 1 & 1\end{array}$$

relaciju odnosno ciklus pa nema pobjednika. U praksi se, medutim, pravilo većine rijetko kad koristi na cijelom skupu alternativa. Primjer su izbori u dva ili više krugova kao što ćemo sada vidjeti. Pretpostavimo da se u prvom krugu bira između alternativa $a$ i $b$, a zatim između $c$ i pobjednika u prvom krugu. Takav postupak vodi, u skladu s gornjim glasačkim preferencijama, na $c$ kao pobjednika:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right\} \to \text{c.}$$

Da smo u prvom krugu birali između $b$ i $c$ imali bismo za pobjednika $a$:

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right\} \to \text{a.}$$

A da smo započeli s $a$ i $c$ onda bi pobjednik bio $b$:

$$\left.\begin{matrix} c \\ a \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} c \\ b \end{matrix}\right\} \to \text{b.}$$

Pobjednik dakle ovisi o tome tko je biran u prvom krugu. Ima još jedna zabrinjavajuća situacija u ovom problemu. Pretpostavimo da prvi glasač zna kakve su preferencije drugih glasača. Tada je moguć sljedeći scenario: Ako se u prvom krugu bira između $a$ i $b$ tada prvi glasač može predvidjeti da će na kraju biti izabran $c$ pa on može sakriti svoje prave namjere i glasati proračunato s preferencijama $b \succ_1 a \succ_1 c$. Tada je konačni izbor $b$:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} \to \text{b.}$$

To pokazuje da prvi igrač taktiziranjem može spriječiti da $c$, njegov najlošiji izbor, bude izabran. Pravilo većine ga nagoni da laže i taktizira kako bi postigao svoje ciljeve.

### 7.4. Arrowljev teorem.

> A democracy cannot exist as a permanent form of government. It can exist only until the voters discover they can vote themselves largesse (defined as a liberal gift) out of the public treasury. From that moment on, the majority always votes for the candidate promising the most benefits from the public treasury, with the result that democracy always collapses over a loose fiscal policy, always to be followed by a dictatorship.
>
> Alexander Fraser Tyler
> (1747–1813)

U stvarnom životu pravila za formiranje grupne odluke razlikuju se od slučaja do slučaja. Do sada smo vidjeli Bordino pravilo, Condorcetovo pravilo, metoda potencijala je nešto općenitija i njezina restrikcija na $\mathcal{P}_A^n$ je također jedna grupna odluka. Odlučivanje za 'Pjesmu Eurovizije' provodilo se, koliko je autoru ovog teksta poznato, po nekoj varijanti Bordine metode. Novinari u Hrvatskoj svake godine biraju najboljeg sportaša, a vinokusci određuju koje će vino na sajmu vina dobiti zlatnu medalju. Bez obzira na raznolikost metoda matematičari su izdvojili nekoliko pravila (aksioma) koja koje bi svaka grupna odluka trebala zadovoljavati. Jedan od aksioma koji smo već implicitno uključili je:

**A1: Slabi uređaj** Svaka relacija $\succcurlyeq_i$, $i \in G$, i grupni konsenzus $\succcurlyeq_G$ su uređaji slabe preferencije na skupu alternativa $A$.

Drugi aksiom je također već implicitno uključen

**A2: Univerzalnost domene.** Područje definicije od $\mathcal{C}$ je cijeli skup $\mathcal{P}_A^n$.

Condorcetovo pravilo ne zadovoljava ovaj aksiom što se vidi iz primjera u tablici 7.2 gdje graf socijalne preferencije nije slaba preferencija, ima ciklus.

Sljedeći aksiom ne treba posebno komentirati.

**A3: Netrivijalnost.**
(i) Grupa $G$ ima bar dva člana.
(ii) Skup $A$ ima bar tri alternative.

**A4: Binarna ovisnost** Neka su $A$ i $A'$ dva skupa alternativa i $\{a, b\} \subset A \cap A'$ tj. alternative $a$ i $b$ su u oba skupa. Pretpostavimo da su profili $\pi \in \mathcal{P}_A$ i $\pi' \in \mathcal{P}_{A'}$ takvi da je

$$a \succcurlyeq_i b \Leftrightarrow a \succcurlyeq'_i b$$
$$b \succcurlyeq_i a \Leftrightarrow b \succcurlyeq'_i a.$$

tj. da svaki član grupe preferira $a$ u odnosu na $b$ (ili obratno) neovisno o ostalim alternativama. Tada od grupne odluke zahtijevamo da zadovoljava:

$$a \succcurlyeq_G b \Leftrightarrow a \succcurlyeq'_G b$$
$$b \succcurlyeq_G a \Leftrightarrow b \succcurlyeq'_G a.$$

**A5: Stroga preferencija.** Ako za svaki $i \in G$ vrijedi $a \succ_i b$ onda je $a \succ_G b$.

**A6: Ne diktatorstvu.** Ne postoji $i \in G$ tako da je $\succcurlyeq_G = \succcurlyeq_i$.

Aksiomi 1–6 predstavljaju 'razumne zahtjeve' koji se očekuju od jedne 'razumne' i 'demokratske' procedure za donošenje grupne odluke. Sljedeći teorem tvrdi da takva procedura ne postoji i u tom smislu svaka glasačka shema, bez obzira kako suptilna bila, krije u sebi 'iracionalno' i 'nedemokratsko' grupno ponašanje pa je svojevremeno taj teorem oneraspoložio, blago rečeno, sve zaljubljenike u zapadnu demokraciju. Godine 1972. Kenneth Arrow dobio je Nobelovu nagradu iz ekonomije.

TEOREM 7.1. *Ne postoji grupni konsensus $\mathcal{C}_A : \mathcal{P}_A^n \to \mathcal{P}_A$ koji zadovoljava aksiome A1–A6.*

Prije nego li dokažemo teorem istaknimo da on ne tvrdi da svaki konsenzus krši bar jedan aksiom već da je svaki konsenzus potencijalno nepravedan u smislu da postoj bar jedna individualna preferencija $\succcurlyeq_i$ koja će onemogućiti konstrukciju funkcije $\mathcal{C}_A$.

Definirajmo još pojam odlučivog skupa koji ćemo koristiti u dokazu teorema.

DEFINICIJA 7.2. Podskup $M \subseteq G$ je ***odlučiv za uređen par*** alternativa $(a, b)$ ako

$$\begin{matrix} a \succ_i b, \ \forall i \in M \\ b \succ_i a, \ \forall i \notin M \end{matrix} \ \Rightarrow a \succ_G b.$$

Drugim riječima podgrupa $M$ ima sposobnost da njena koherentnost u preferencijama za alternative $a$ i $b$ ima 'snagu da isforsira' isto grupno mišljenje unatoč suprotnim mišljenjima svih ostalih članova grupe koji nisu u $M$.

DEFINICIJA 7.3. Podskup $M \subseteq G$ je ***minimalni odlučiv podskup*** ako je odlučiv za bar jedan par $(a, b)$ i takav da za svaki drugi par $(c, d)$ ne postoji pravi podskup od $M$ koji je odlučiv za taj par.

DOKAZ. Dokaz provodimo u dvije faze. Prvo ćemo dokazati da minimalni odlučivi podskup mora biti jednočlan skup, a zatim ćemo dokazati da je on nužno diktator.

Neka je $M$ minimalni odlučivi podskup i odlučiv za par $(a, b)$. Pretpostavimo da $M$ sadrži više od jednog elementa i neka je $g$ jedan od njih. Označimo $N = M \setminus \{g\}$ i $M' = G \setminus M$. Odaberimo individualne preferencije za alternative $a, b, c$ kao u sljedećoj tablici.

| | $\{g\}$ | $N$ | $M'$ |
|---|---|---|---|
| 1. | $a$ | $c$ | $b$ |
| 2. | $b$ | $a$ | $c$ |
| 3. | $c$ | $b$ | $a$ |

U tablici, u drugom stupcu na primjer, oznaka znači da vrijedi $c \succ_i a \succ_i b$ za svaki $i \in N$.

Prema aksiomu A3 grupni konsenzus postoji bez obzira na preferencije na ostalim alternativama, a zbog aksioma A4 te preferencije ne utječu na grupni konsenzus na $a, b, c$. Očito vrijedi da je $a \succ_G b$ jer je $M$ odlučiv skup za par $(a, b)$. Također je $b \succcurlyeq_G c$ jer bi u suprotnom $N$ bio odlučiv skup za par $(c, b)$. Kako je grupna odluka slabi uređaj zbog A1 to zbog tranzitivnosti vrijedi $a \succ_G c$. Pogledamo li pažljivije odabrane uređaje u tablici, vidimo da samo $g$ zahtjeva $a \succ_g c$ što znači da je jednočlan skup $\{g\}$ odlučiv za par $(a, c)$ što je u kontradikciji s minimalnošću od $M$. Jedini način da izbjegnemo kontradikciju je prihvatiti da $M$ bude jednočlan skup.

Sada ćemo dokazati da je $g$, koji je odlučiv za $(a, b)$ diktator, tj. $\succcurlyeq_G = \succcurlyeq_g$. Prvo ćemo dokazati da $a \succ_g d \Rightarrow a \succ_G d$ za svaki $d \neq b$. Odaberimo sad sljedeći odnos među alternativama

| | $\{g\}$ | $G \setminus \{g\}$ |
|---|---|---|
| 1. | $a$ | $b$ |
| 2. | $b$ | $d$ |
| 3. | $d$ | $a.$ |

Pošto je $\{g\}$ odlučiv za $(a, b)$ to implicira $a \succ_G b$. S druge strane, svi članovi grupe preferiraju $b$ u odnosu na $d$ pa to mora činiti i grupni konsenzus zbog aksioma A5. Zbog tranzitivnosti konsenzusa je sada $a \succ_G d$ što smo i htjeli dokazati. Također vrijedi i $a \succcurlyeq_g d \Rightarrow a \succcurlyeq_G d$ što je trivijalna posljedica upravo dokazanog.

Sljedeći korak je dokazati da $c \succ_g d \Rightarrow c \succ_G d$ za $c \neq a$. U tu svrhu promatrajmo ovakav odnos među alternativama $a, d, c$ u kojem jedino $g$ zahtijeva $c \succ_G d$:

| | $\{g\}$ | $G \setminus \{g\}$ |
|---|---|---|
| 1. | $c$ | $d$ |
| 2. | $a$ | $c$ |
| 3. | $d$ | $a$. |

Prema A5 slijedi

$$c \succ_G a.$$

Od ranije imamo

$$a \succ_G d,$$

pa zbog tranzitivnosti

$$c \succ_G d,$$

što se i htjelo dokazati. Još je jedino preostalo dokazati da $c \succ_g a \Rightarrow c \succ_G a$. U tu svrhu pogledajmo takav odnos među alternativama $c, d, a$ u kojem jedino $g$ zahtijeva $c \succ_G a$:

| | $\{g\}$ | $G \setminus \{g\}$ |
|---|---|---|
| 1. | $c$ | $d$ |
| 2. | $d$ | $a$ |
| 3. | $a$ | $c$. |

Prema prethodnom je

$$c \succ_G d.$$

Zbog A5 je

$$d \succ_G a,$$

pa zbog tranzitivnosti

$$c \succ_G a,$$

što dokazuje traženu implikaciju. Time smo dokazali da vrijedi implikacija $x \succ_g y \Rightarrow x \succ_G y$ što dokazuje diktatorstvo od $g$ i u kontradikciji je s aksiomom A6. Zaključak, grupni konsenzus koji zadovoljava A1–A6 ne postoji. $\square$

### 7.5. Potraga za demokracijom.

> Democracy: the belief in freedom and equality between people, or a system of government based on this belief, in which power is either held by elected representatives or directly by the people themselves.
>
> Cambridge International
> Dictionary of English

Arrowljev teorem ima daleko veću primjenu nego što se to na prvi pogled čini. Neki će prigovoriti da je većina procedura glasanja takva da glasač nije obavezan dati slabu preferenciju na skupu alternativa, kao što to pretpostavka teorema zahtijeva, već se samo traži da predloži svoj najbolji izbor. Arrowljev teorem odnosi se i na takve procedure, način na koji se formira grupna preferencija nije uopće važan u dokazu pa takve situacije gdje je jedan dio informacija naprosto zanemaren predstavljaju legalne procedure. Teorem vrijedi čak i kad glasači ne znaju da glasaju kao što je to situacija kod 'kupovanja glasova'.

Potraga za demokracijom okomila se na pretpostavke teorema tj. na aksiome A1–A6 pokušavajući ih diskreditirati. Diskutirati ćemo svaki od pokušaja da se aksiomi pokažu neadekvatnim ili prezahtjevnim. Započnimo s aksiomom A6 koji onemogućava diktatorstvo.

Taj aksiom ne samo da onemogućava vidljivog nego i nevidljivog diktatora i to bez obzira da li pojedinac (ne)zna da je diktator ili to (ne)znaju i ostali članovi grupe.

Aksiom A5 (stroga preferencija) je univerzalno prihvaćen. Ako svaki pojedinac iz grupe preferira $a$ u odnosu na $b$ onda bi to trebala činiti i grupna odluka. Aksiom koji smo mi prihvatili to zahtijeva za strogu preferenciju. Jača verzija aksioma koja zahtijevaju to isto ali za slabu preferenciju je kontroverznija i također razmatrana. Štoviše, može se pokazati da isti rezultat kao i Arrowljev vrijedi i bez aksioma A5 (Wilson, [**?**]) — on zasigurno nije razlog nepostojanja grupne odluke.

Aksiom netrivijalnosti A3 nije potrebno posebno komentirati. Teško da se može tvrditi da skup od jednog člana čini grupu. Što se tiče zahtjeva da broj alternativa bude najmanje tri taj je zahtjev posve opravdan jer se može pokazati da za dvije alternative jednostavno pravilo većine zadovoljava sve ostale aksiome.

Aksiom A1 koji zahtjeva da sve relacije budu relacije slabog uređaja čini se na prvi pogled prezahtjevan. Praksa pokazuje da su ljudi rijetko kad ’racionalni’ u smislu da njihove preferencije bude tranzitivne, a nije čest slučaj da čak nisu u stanju usporediti niti sve parove. Ima li smisla taj aksiom oslabiti? Ako bi i dokazali egzistenciju grupne odluke s tako oslabljenim zahtjevom onda bi ispalo da samo iracionalni pojedinci mogu biti ’demokratični’. Nemogućnost i dalje implicitno ostaje prisutna:

Što se univerzalnosti domene tiče, aksiom A2, on je u dokazu teorema odigrao ključnu ulogu. Možda bi sužavanjem domene grupnog konsenzusa ipak omogućili ’demokratsku’ grupnu odluku. Prihvaćanje tog aksioma je ujedno i pitanje građanskog suvereniteta. Moralo bi se dozvoliti **svako** individualno mišljenje bez ikakve restrikcije. Postoje čisto pragmatični razlozi protiv tog aksioma. Pojedinci se udružuju u grupe i donose mišljenje zato jer imaju neki zajednički interes. Stoga su njihove individualne preferencije korelirane baš zbog tog zajedničkog interesa. Obrazloženja tog tipa čine se prilično demagoška i teško je vjerovati da bi društvene grupe sukobljene po pitanju nekih socijalnih prava pristale na restrikciju svojih zahtjeva.

Jedan od načina na koji se pokušavalo zaobići taj aksiom su preferencije s ’jedinstvenim maksimumom’ ali takve preferencije nemaju baš neki socijalni smisao, v. također diskusiju u French [**?**].

Aksiom koji zslužuje nešto više pažnje je A4 (binarna ovisnost). Originalni Arrowljev teorem pretpostavlja sljedeći aksiom

**A4’: Nezavisnost o irelevantnim alternativama** Pretpostavimo da su neke od alternativa uklonjene iz skupa alternativa $A$. Tada, ako niti jedan član grupe nije promijenio svoje preferencije među preostalim alternativama, tada grupna preferencija na novom skupu alternativa mora biti ista kao i stara.

Dokazati ćemo, v. poglavlje 7.6, da je aksiom A4 posljedica aksioma nezavisnosti irelevantnih alternativa, a kako dokaz Arrowljevog teorema koristi ’nezavisnost irelevantnih alternativa’ preko binarne ovisnosti onda smo pretpostavili samo A4. Štoviše ti su aksiomi ekvivalentni.

Aksiom A4 je najkontroverznija pretpostavka u cijeloj teoriji odlučivanja. Evo jednog primjera koji ne govori u prilog tog aksioma. Dva prijatelja, Ivo i Mate, razmišljaju o tome da li da skuhaju `čaj` ili `kavu`. Umjesto da jednostavno izraze svoje preferencije u vezi s problemom oni su si dali truda i svaki od njih je rangirao sedam pića:

$$\texttt{kava} \succ_1 \texttt{pivo} \succ_1 \texttt{mlijeko} \succ_1 \texttt{limunada} \succ_1 \texttt{čokolada} \succ_1 \texttt{cola} \succ_1 \texttt{čaj}$$

$$\texttt{čaj} \succ_2 \texttt{kava} \succ_2 \texttt{pivo} \succ_2 \texttt{mlijeko} \succ_2 \texttt{limunada} \succ_2 \texttt{čokolada} \succ_2 \texttt{cola}$$

Iako su interesi u konfliktu jer je ’`kava` $\succ_1$ `čaj`’ i ’`čaj` $\succ_2$ `kava`’ svatko ’razuman’ će reći da bi grupni interes trebao biti

$$\texttt{kava} \succ_G \texttt{čaj}.$$

Za Matu je `čaj` prvi izbor, a `kava` drugi. `kava` je prvi izbor za Ivu dok mu je `čaj` posljednji na listi. Ostala pića, njih pet, za Ivu imaju veći prioritet od čaja i manji prioritet od kave što nudi zaključak da snaga preferencije ’`kava` $\succ_1$ `čaj`’ i snaga preferencije ’`čaj` $\succ_2$ `kava`’ nisu jednake. Tih pet alternativa je stoga bilo ralevantno kod donošenja grupne preferencije. Aksiom A4 ovdje nije poštovan.

Stvari nisu sasvim takve kako se na prvi pogled čini. Ako već uvažavamo snagu preferencije onda je moguća i situacija kao na slici 4 gdje su Ivo i Mate predložili svoje preferencije na nekoj skali (više je bolje). Sasvim je moguće da sada grupna preferencija bude na strani `čaja` jer se čini da Ivo ima male razlike u preferencijama dok mate izuzetno preferira čaj i izgleda ne mari za ostalo. Ovdje se implicitno pretpostavlja da i Ivo i Mate mjere svoje preferencije na istoj skali. Ovaj primjer inicira lavinu pitanja i svako od njih je suštinskog karaktera.

Kao prvo, čini se da aksiom A4 onemogućava bilo kakav pojam snage preferencije u proceduru zaključivanja. Drugo, izbor mjerne skale može predstavljati ozbiljan problem. U stvarnosti svaki donosilac odluke zamišlja svoju mjernu skalu i trebalo bi osmisliti neki test ili proceduru radi provjere usklađenosti tih skala.

Čak i da svi članovi grupe savršeno usklađeno koriste jednu te istu skalu postoji još jedna zbunjujuća situacija. Prisjetimo se, na trenutak, konstrukcije intervalne skale na temelju relacije slabe preferencije i relacije slabe preferencije na zamjenama, teorem **??** na str. **??**. U toj konstrukciji važnu ulogu su imale hipotetičke alternative, mi smo ih nazivali igrama, s kojima smo proširili skup alternativa jer je za interpolaciju funkcije vrijednosti izvan konačnog skupa nužno imati dovoljno mnogo elemenata. Ta je ideja jasna i razumljiva i navela je von Neumanna i Morgensterna na spomenutu konstrukciju. Ako pretpostavimo aksiom binarne ovisnosti, onda te hipotetičke alternative ne bi smjele biti relevantne za grupnu odluku, pa stoga ni snaga preferencije, kao posljedica dobivene mjerne skale, također ne bi smjela biti relevantna. Naš primjer, naprotiv, kazuje sasvim suprotno. U čemu je problem? Pa što, rekao bi netko sa strane, ako odbacimo aksiom A4. Što se tada mijenja? U hiperboličkoj geometriji postoje više paralela sa zadanim pravcem kroz zadanu točku pa se nitko oko toga previše ne uzbuđuje. Situacija je slična ovoj samo je u pitanju Euklidov V aksiom a ne aksiom A4. Problem uopće nije mali kako možda izgleda na prvi pogled. Razne ’škole odlučivanja’ sukobljuju se već desetljećima opovrgavajući argumente jedni drugima.

| Ivo | Mate |
|---|---|
| kava | čaj |
| pivo | |
| mlijeko | |
| lumunada | |
| čokolada | |
| cola | |
| čaj | kava |
| | pivo |
| | mlijeko |
| | lumunada |
| | čokolada |
| | cola |

SLIKA 4. Preferencije s težinom

Čini se da je u pozadini tog sukoba nerazjašnjenost pojma 'hipotetička' alternativa. Problem odluke je prisutan ako postoji problem izbora iz zadanog skupa alternativa. To su 'realne' ili 'moguće' alternative. U procesu odlučivanja realna je mogućnost da se promijene ciljevi ili uključe nove alternative u razmatranje ali još uvijek imamo posla s realnim alternativama, one *mogu biti izabrane*. Hipotetičke alternative su pomoćnog karaktera i pojavljuju se u trenutku kad donosilac odluke vrši konstrukciju funkcije vrijednosti. One mu pomažu da profini svoje preferencije i relevantne su za konstrukciju funkcije vrijednosti. Ako želimo zadržati aksiom A4 onda ga treba zahtjevati samo sa realne alternative.

Dopustimo li mogućnost da svaki član grupe konstruira svoju izmjerivu funkciju vrijednosti tada se ponovno aktualizira pitanje egzistencije grupne funkcije vrijednosti u duhu Arrowljevog teorema. Odgovor je potvrdan.

TEOREM 7.4. *Neka su $v_1, \ldots, v_n$ izmjerive funkcije vrijednosti članova grupe $G = \{1, \ldots, n\}$. Neka je $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija sa strogo rastućim derivacijama. Tada relacija $\succcurlyeq_G$ definirana s*

$$a \succcurlyeq_G b \Leftrightarrow V(v_1(a), \ldots, v_n(a)) \geq V(v_1(b), \ldots, v_n(b))$$

*zadovoljava sljedeća svojstva:*

i) *Slaba preferencija. $\succcurlyeq_G$ je slaba preferencija.*
ii) *Netrivijalnost. $\succcurlyeq_G$ je definirana za svaki skup alternativa.*
iii) *Univerzalnost domene. $\succcurlyeq_G$ je definirana za svaku $n$-torku funkcija vrijednosti $(v_1, \ldots, v_n)$.*

iv) *Binarna ovisnost. Uređaj na paru (realnih) alternativa ne ovisi o ostalim alternativama.*
v) *Stroga preferencija. Ako za svakog člana grupe $i$ vrijedi $v_i(a) > v_i(b)$, tada je $v_G(a) \succ v_G(b)$.*
vi) *Ne diktatorstvu. Ne postoji član grupe $i$ takav da vrijedi $v_i(a) > v_i(b) \Rightarrow v_G(a) \succ v_G(b)$.*

DOKAZ. i) Relacija $\succcurlyeq_G$ je slaba preferencija jer je definirana preko uređaja na skupu vrijednosti funkcije $V(v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot))$.
ii) Očito.
iii) Očito.
iv) Očito.
v) Pošto su se sve parcijalne derivacije pozitivne, funkcija $V$ je rastuća u svakoj varijabli, pa $v_i(a) > v_i(b)$ za svaki indeks $i$ očito povlači[4]

$$V(v_1(a), \dots, v_n(a)) > V(v_1(b), \dots, v_n(b)).$$

vi) Pretpostavimo da za par alternativa $a, b$ član $1$ grupe daje prednost alternativi $a$, npr.

$$v_1(a) = v_1(b) + \delta_1$$

gdje je $\delta_1$ pozitivan. Mi ćemo pokazati da, bez obzira na vrijednost od $\delta_1$, nije nužno $a \succcurlyeq_G b$, što znači da $1$ nije diktator. Isti argument nam može poslužiti kao dokaz da niti jedan član grupe nije diktator.

Po pretpostavci je $\frac{\partial V}{\partial v_k} > 0$ za svako $k$. Pretpostavimo da član $k$ grupe preferira $b$ u odnosu na $a$,

$$v_k(b) = v_k(a) + \delta_k$$

a svi ostali su indiferentni tj. $v_j(a) = v_j(b)$ za svaki $j$ različit od $1, k$. Tada je

$$\begin{aligned} V(v_1(b), \dots, v_n(b)) &- V(v_1(a), \dots, v_n(a)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial v_1}(-\delta_1) + \frac{\partial V}{\partial v_k}\delta_k + \text{ članovi višeg reda} \\ &> 0, \end{aligned}$$

za $\delta_1$ dovoljno malo i

$$\delta_k = \left[1 + \frac{\frac{\partial V}{\partial v_1}}{\frac{\partial V}{\partial v_k}}\right] \cdot \delta_1,$$

što znači da preferencija prvog člana može biti prevagnuta s preferencijom $k$-tog člana. $\square$

[4]Primjetite da je za ovu tvrdnju dovoljno da je bar jedna parcijalna derivacija pozitivna, a ostale nenegativne.

Isti dokaz teorema prolazi i u slučaju da su samo dvije parcijalne derivacije strogo pozitivne, a ostale nenegativne. Interesantno je da je u tom slučaju moguća 'diktatorska koalicija', v. [**?**, Problem 8.8.7].

Koliko je vrijedan gornji rezultat? Pretpostavke teorema su prilično zahtjevne jer se traži da funkcije $v_i,\ i \in G$ budu izmjerive funkcije na (istom) skupu alternativa. Zbog jedinstvenosti izmjerive funkcije, do na pozitivnu afinu transformaciju, to znači da mjerne jedinice skale članova grupe moraju biti usporedive. Drugim riječima, smisleno je postaviti pitanje je li član grupe $i$ 'jednako (više, manje) preferira' alternativu $a$ u odnosu na $b$ kao i član $j$ alternativu $c$ u odnosu na $d$. Takva interpersonalna usporedba mora biti moguća i ako to nije moguće učiniti onda je slaba korist od teorema. Do sada, uz mnoge pokušaje, to nije nikome pošlo za rukom. Vidi također diskusiju u knjizi French [**?**, str. 298].

Važno je također uočiti da teorem uspostavlja samo slabu grupnu preferenciju i ne tvrdi da je $V(v_1(\cdot),\dots,v_n(\cdot))$ izmjeriva funkcija vrijednosti nego (samo) ordinalna funkcija vrijednosti.

Pogledajmo još samo samo kakve sve funkcije $V$ zadovoljavaju uvjet teorema. To može biti suma komponenata ili aritmetička sredina. Isto tako, ako su $v_i$ pozitivne funkcije, što se lako može postići dodavanjem konstante, onda to može biti i geometrijska sredina (s težinama ili bez) ili neka druga sredina.

### 7.6. Još o socijalnim aksiomima.

LEMA 7.5. *Aksiom binarne ovisnosti posljedica je aksioma nezavisnosti o irelevantnim alternativama.*

DOKAZ. Pretpostavimo da $\succcurlyeq_i,\ i = 1,\dots,n; A$ i $\succcurlyeq'_i,\ i = 1,\dots,n; A'$ zadovoljavaju hipoteze aksioma A4. Zanemarimo li u skupu $A$ sve alternative osim $a, b$ i u skupu $A'$ sve alternative osim $a, b$ tada prema aksiomu nezavisnosti o irelevantnim alternativama (dva puta primjenjeno) dobijemo

$$a \succcurlyeq_G b \Leftrightarrow a \succcurlyeq'_G b$$
$$b \succcurlyeq_G a \Leftrightarrow b \succcurlyeq'_G a$$

što dokazuje aksiom A4. □

Vrijedi i obrat:

LEMA 7.6. *Aksiom nezavisnosti o irelevantnim alternativama posljedica je aksioma binarne ovisnosti.*

DOKAZ. Pretpostavimo da vrijedi A4 i neka je $A'$ nastao iz skupa $A$ brisanjem nekih alternativa. Tada primjenimo $A4$ na svaki par alternativa $a, b$ iz $A'$. □

Sljedeća dva aksioma pokazuju se jednako interesantnima i važnima kao i aksiomi u pretpostavci Arrowog teorem. Pokazati ćemo njihov odnos prema aksiomoma A1–A4.

**Aksiom pozitivne asocijacije socijalne i individualne vrijednosti.** Pretpostavimo da za profil $\pi = (\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n)$ i grupnu odluku $\succcurlyeq_G$ vrijedi $a \succ_G b$ za par alternativa $a, b \in A$. Pretpostavimo da članovi grupe promjene svoje preferencije tako da:

i) preferencije koje ne uključuju $a$ ostaju nepromjenjene;
ii) preferencije koje uključuju $a$ mogu biti promijenjene u korist $a$, tj. $c \succ_i a$ može biti promijenjeno u $a \succcurlyeq_i c$, a $a \succcurlyeq_i c$ može biti promijenjeno u $a \succ_i c$.

U tom slučaju za grupnu odluku na novom profilu vrijedi i dalje $a \succ_G b$.

**Aksiom građanskog suvereniteta.** Za svaki par alternativa $a, b \in A$ postoji profil $\pi$ takav da je $a \succ_G b$.

LEMA 7.7. *Aksiom pozitivne asocijacije socijalne i individualne vrijednosti, aksiom građanskog suvereniteta i aksiom binarne relevantnosti povlače aksiom stroge dominacije A4.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $a \succ_i b$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Prema aksiomu građanskog suvereniteta postoji profil $\pi = (\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n)$ takav da je $a \succ_G b$. Sada promijenimo relacije $\succcurlyeq_i$ na sljedeći način:

$a \succ_i b$ ne mijenjamo;
$a \succcurlyeq_i b$ promijenimo u $a \succ_i b$;
$b \succcurlyeq_i a$ promijenimo u $a \succ_i b$.

Prema aksiomu pozitivne asocijacije socijalne i individualne vrijednosti grupna odluka za novi profil i dalje drži da je $a \succ_G b$. S druge strane, novi profil i polazni profil se podudaraju na paru $a, b$ pa prema aksiomu binarne relevantnosti grupna odluka za oba profila daje isti odnos za taj par, a to je $a \succ_G b$. $\square$

PRIMJER 7.8. Bordina metoda zadovoljava sve aksiome Arrowljevog teorema osim aksioma binarne ovisnosti A4.

Promatrajmo sljedeći grupni profil nad alternativama $A = \{a, b, c, d\}$ za grupu sudaca $G = \{s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7\}$.

| | $s1$ | $s2$ | $s3$ | $s4$ | $s5$ | $s6$ | $s7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ | $a$ |
| 2. | $b$ | $c$ | $d$ | $b$ | $c$ | $d$ | $b$ |
| 3. | $c$ | $d$ | $a$ | $c$ | $d$ | $a$ | $c$ |
| 4. | $d$ | $a$ | $b$ | $d$ | $a$ | $b$ | $d$ |

Broj bodova za svaku alternativu, računat po Bordinoj metodi, je

$$\begin{array}{ll} a & 4+1+2+4+1+2+4=18 \\ b & 3+4+1+3+4+1+3=19 \\ c & 2+3+4+2+3+4+2=20 \\ d & 1+2+3+1+2+3+1=13, \end{array}$$

što pokazuje da je $c$ pobjednik. Eliminiramo li alternativu $d$ iz konkurencije i ponovno provedemo račun dobijemo $a$ kao pobjednika,

$$\begin{array}{ll} a & 3+1+2+3+1+2+3=15 \\ b & 2+3+1+2+3+1+2=14 \\ c & 1+2+3+1+2+3+1=13, \end{array}$$

što pokazujemo da grupni poredak između $a$ i $c$ ovisi o ostalim alternativama, pa nije zadovoljen aksiom nezavisnosti o irelevantnim alternativama. Zbog ekvivalencije tog aksioma i aksioma A4 nije zadovoljen niti aksiom A4 što se i željelo pokazati[5].

Ostavljamo čitaocu za vježbu da sâm dokaže da Bordina metoda zadovoljava ostale aksiome.

[5]Konstruirajte primjer koji direktno pokazuje da aksiom binarne ovisnosti nije zadovoljen.

POGLAVLJE 2

# Logika i psihologija odlučivanja

## 1. Može li se mišljenje modelirati?

> Ne razumijemo kako um radi — niti približno onako dobro kao što razumijemo kako radi tijelo, a zasigurno ne dovoljno dobro da bi stvorili utopiju ili izliječili nesreću.
>
> S. Pinker, psiholog

U ovom poglavlju dati ćemo kratki prikaz onog dijela psihologije koji opisuje načine donošenja odluka, tj. descriptivnim aspektom odlučivanja. Postoji i drugi aspekt, tzv. normativni aspekt u kojem se proučavaju pravila kako bi ljudi trebali donositi odluke. Devijacije izmed̄u toga kako se ljudi ponašaju i kako bi se, u ovom kontekstu, trebali ponašati zaokupljaju psihologe posljednjih pedeset godina, posebno nakon radova von Neumanna i Morgensterna sredinom prošlog stoljeća [**39**]. Napomenimo samo da je Daniel Kahneman god. 2002 dobio Nobelovu nagradu iz ekonomije za istraživanja vezana uz odlučivanje, posebno na zasnivanju i razvoju tzv. *Prospect theory* [**21**]. Ta teorija objašnjava razloge devijacija izmed̄u normativnog i deskriptivnog ponašanja ljudi u sferi odlučivanja. Moderne metode u marketingu i socijalnoj psihologiji bazirane su i ujedno služe kao eksperimentalno polje za tu teoriju.

### 1.1. Ciljno mišljenje.

> Inteligencija je mogućnost postizanja ciljeva usprkos zaprekama uz pomoć odluka donešenih na temelju racionalnih (istini–podložnih) načela.
>
> S. Pinker (psiholog)

Da bi bolje razumjeli tehnike donošenja odluke, kao što je hijerarhijski model na primjer, nije na odmet raspraviti o tome što je to mišljenje kao jedna od funkcija mozga i što podrazumijevamo pod mišljenjem s ciljem ili ciljnim mišljenjem.

Mišljenje je prema Petzu [**28**] nejednoznačan termin, koji pokriva različite pojave. U širem smislu, uključuje svaki kognitivni proces obrade ideja, predodžbi, slika, simbola i pojmova. Stoga u okvir mišljenja ulaze različiti procesi od asociranja, sjećanja i maštanja, preko stjecanja pojmova, do logičkog rezoniranja (rasuđivanja) i stvaralačkog mišljenja.

Dva su obilježja zajednička svim ovim varijetetima mišljenja. Prvo, misaoni procesi u prikriveni, implicitni procesi koji se ne mogu neposredno opažati. O njihovu postojanju zaključujemo na temelju introspektivnog iskaza opažanika ili na temelju nekog ponašanja koje upućuje na implicitno mišljenje (npr. na temelju toga što je neki složeni problem uspješno riješen). Drugo, misaoni procesi su simbolični procesi; obilježava ih upotreba simbola koji predstavljaju objekte i događaje. Kada promatramo neki objekt mi nemoramo ništa misliti; ali ako želimo opisati naše promatranje, u trenutku kad se ono ne odvija, mi moramo prijeći na simbolički plan, koji je svojstven misaonim procesima. Na taj način u našem su mišljenju prisutni zapamćeni i zamišljeni sadržaji, a ne samo aktuelno percIprani; sadržaj mišljenja nadilazi neposrednu razinu percipirane datosti.

Kada simbol odražava opća i bitna obilježja neke klase sadržaja zajedničkih svojstava nazivamo ga pojmom. Pojam je produkt misaonih procesa, ali on je i pretpostavka mišljenju; bez pojmova ne bi bilo moguće apstraktno mišljenje. Pojmovi se u mišljenju prožimaju s predodžbenim slikama i riječima, koje su oblik postojanja pojmova. Mišljenje je zato usko povezano i s govorom; osim što je sredstvo komunikacije, govor predstavlja i sustav simbola i pravila, koji olakšavaju mišljenje.

Mišljenje predstavlja najsloženiji vid čovjekove psihičke aktivnosti, vid po kojem se čovjek i ponajviše razlikuje od ostalih živih bića. Njegovu fiziološku osnovu tvore složeni procesi u živčanom sustavu, osobito u sivoj kori velikog mozga. Kao složena psihička aktivnost odražavanja općih i bitnih svojstava pojava, mišljenje je oblik posrednog spoznavanja stvarnosti. Mišljenje se razvilo kroz čovjekovo praktično djelovanje i doprinosi njegovoj uspješnijoj prilagodbi u svijetu.

U fazi izgradnje matematičkog modela nekog procesa ljudi uočavaju objekte, i njima pridružene varijable, koji sudjeluju u tom procesu i uočavaju odnose među tim varijablama. Sama potreba za modelom već nosi u sebi i neku predstavu o tome kakvi bi odnosi među varijablama trebali biti. Detalji i opravdanje dodatnih heuristka (pretpostavki) nužnih za funkcionalnost modela zahtjevaju eksperimentalnu provjeru i potvrdu. Ono što je pri tome važno istaknuti je da funkcionalnost modela ne ovisi o kvalitativnim svojstvima objekata čije odnose želimo[1] modelirati već samo o njihovim međusobnim odnosima (u modelu). U tom smislu je matematika apstraktna znanost jer isti nodel može biti primjenjen na razne realne situacije. U tom smislu je matematika i besmislena jer ne daje odgovore na pitanje 'zašto' već 'kako'.

U modeliranju procesa donošenja odluke, ako slijedimo gornju misao, potrebno je nabrojiti sve elemente, sudionike odlučivanja. Mi ćemo ih nazivati imenima iz svakidašnjeg života i stoga implicitno sugeriramo i njihove odnose jer svaki takav pojam unosi u model i neko naše iskustvo. Što se mentalnih procesa tiče iskustva su individualna, a model koji gradimo je transpersonalan i u tom smislu je civilizacijsko dostignuće. Kad govorimo o odnosu među varijablama u modelu, ne znači da ti odnosi moraju nužno biti izraženi formulama. Formula je samo jedan tip matematičkog objekta, drugi su relacije, skupovi, funktori, strukture. . .

Model mišljenja koji ovdje izgrađujemo nazivati ćemo, prema Baronu [**3**], ***search-inference okvir***. Mišljenje započinje kad smo u nedoumici kako djelovati, u što vjerovati ili žto željeti. U tim situacijama cilj razmišljanja je oslobađanje tih nedumica, tih sumnji. Odluka koje prethodi nekoj akciji je posljedica razmišljanja, izbor osobnih ciljeva i formiranje uvjerenja također. Elementi odlučivanja su: ***ciljevi***, ***mogućnosti*** (za postizanje tih ciljeva) te ***uvjerenja***

**Mogućnosti:** ili alternative predstavljaju razne puteve (načine) postizanja ciljeva. Pretpostavljamo, jednostavnosti radi, da se te mogućnosti međusobno isključuju[2].

**Cilj:** služi za procjenu mogućnosti, pa ih možemo shvaćati i kao standarde za procjenu. Drugi naziv za cilj je kriterij, svrha ili obilježje koje je zajedničko za dvije ili više alternativa.

Razlikujemo ciljeve za razmišljanje i osobne ciljeve koji su usvojeni već u ranom djetinjstvu. Određen dio osobnih ciljeva prisutan je u svakom razmišljanju dok je veći dio njih irelevantan, za konkretan proces razmišljanja.

**Uvjerenje:** ima dvojako značenje. S jedne strane je to naznaka u kojoj mjeri neka mogućnost ispunjava zadani cilj. To možemo shvatiti i kao uvjerljovost postizanja cilja. Drugo značenje ne

[1]Nije baš sasvim tako jer kvalitativna svojstva objekata jesu uzrok takvih odnosa, ali za model nisu više bitna. Bitna su za interpretaciju.

[2]Ostavimo po strani pitanje egzistencije takvih mogućnosti. Za početak želimo objasniti osnovni princip kojeg ćemo kasnije poboljšavati i prilagođavati specijalnim situacijama.

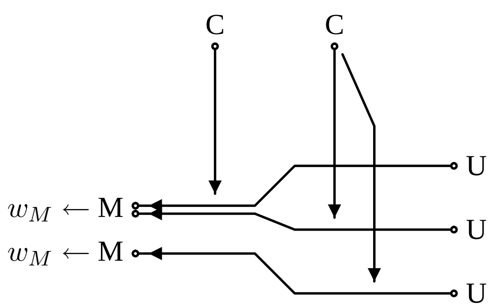
odnosi se samo na jednu mogućnost i ne treba ga miješati s težinom ili preferencijom koju pridjeljujemo mogućnosti. Uvjerenje je prije svega sposobnost razlučivanja, uočavanja različitosti, među mogućnostima i ono je u službi ciljeva. Uočena razlika među mogućnostima ima to veći utjecaj na konačnu odluku koliko su važniji nadređeni ciljevi.

Drugi naziv za uvjerenje je: stav, dokaz, dogma. Uvjerenje je katkada obojeno emocijama što znači da su emocije također jedan od elemenata u donošenju odluke.

REZIMIRAJMO:
***Razmišljanje s ciljem*** (goal–directed thinking) je spoznajni proces koji nam pomaže pri:

- donošenju odluke u zadovoljavanju osobnih ciljeva,
- usvajanju uvjerenja koje su akcije efikasnije,
- prihvaćanju ciljeva usklađenim s našim višim ciljevima, uključujući i zadovoljstvo vlastitim životom.

Ono se može opisati kao zaključivanje temeljeno na: alternativama, uvjerenjima i ciljevima. Odnos elemenata u odlučivanju možemo prikazati skicom. Uvjerenje (U) utječe na težinu mogućnosti (M) ali u službi ciljeva




SLIKA 1. Uzorak ciljnog mišljenja.

(C). Pri tome neki ciljevi mogu promijeniti poredak važnosti alternativa (manje je bolje). Opisani proces nazivamo još i mišljenjem o mogućnostima. Kraj takvog razmišljanja je odluka koja prethodi ostvarivanju jedne od mogućnosti — akciji. Opisana struktura misaonog procesa je uzorak koji može biti prepoznat i u složenijem misaonom procesu kao na primjer u kasnije opisanoj situaciji u kojoj i ciljevi postaju predmet mišljenja, v. poglavlje 1.1.1.

Ciljevi, alternative i uvjerenja u procesu odlučivanja nisu stalni. Ako uvjerenje u različitost dviju mogućnosti nije dovoljno snažno potražiti ćemo novo obilježje zajedničko tim alternativama i pokrenuti novi misaoni postupak za vrednovanje, sada novih, ciljeva s ciljem postizanja uočljivije razlike među alternativama. U tom sekundarnom misaonom procesu novi ciljevi postaju mogućnosti za evaluaciju u odnosu na više ciljeve. Pri tome se preispituju i uvjerenja i novi ciljevi s tim da se ne isključuje mogućnost ponovnog uključivanja nekih starih mogućnosti koje smo ranije izbacili iz razmatranja kao nebitne ili smo ih identificirali s nekom od postojećih.

U potrazi za sekundarnim ciljevima kao u gornjoj situaciji, isto kao i u procesu razlikovanja alternativa, mi ***prosuđujemo***. Nismo puno pogriješili ako prosuđivanje shvatimo kao tehniku ili primjenu određenog skupa pravila čije (ne)korektnosti možemo i ne moramo biti svjesni[3]. Pravila kojima se rukovodimo u prosuđivanju su dio našeg bića bilo da su urođena ili naučena. Otkrivanje tih pravila je također jedan od zadataka teorije odlučivanja, v. poglavlje 2.3.3.

Evo jednog praktičnog primjera u kojem se traži stan. Mogućnosti su stanovi na raspolaganju. Oni mogu biti prisutni u našoj svijesti i prije nego li razmišljanje počne, a mogu biti dodani i tokom same potrage za odlukom, npr. iz oglasa u novinama. Ciljevi su razni aspekti po kojima se stanovi razlikuju i služe za vrednovanje stanova: cijena najma, udaljenost od škole ili radnog mjesta, sigurnost kvarta, kvaliteta izrade. Najviši cilj je imati krov nad glavom[4]. Na temelju uvjerenja i stavova vršimo prosudbe i dajemo prednosti nekim stanovima. Uvjerenja mogu biti u formi jednostavnih izjava kao: "Najam je 500 kn", a može biti i gomila argumenata, izmišljenih scenarija ili primjera. Snaga uvjerenja ne daje automatski težinu određenom stanu već radije povećava diferenciranost između stanova. Prednost nekom stanu kontrolira donosilac odluke ovisno o važnosti ciljeva kojima služe pojedina uvjerenja.

1.1.1. *Potraga za uvjerenjima.* Ciljevi kao predmet mišljenja su svakodnevna pojava i ovdje ćemo spomenuti neke od tih situacija. Osnovni uzorak mišljenja s ciljem, shematski prikazan slikom 1, str. 52 je i ovdje prisutan.

1.1.2. *Medicinska dijagnoza.* U postavljanju dijagnoze neke bolesti cilj je otkriti od čega pacijent boluje. Simptomi su prisutni i traže se uzroci. Alternative su sada uzroci bolesti, a znakovi bolesti su kriteriji po kojima razlikujemo uzroke. Ovdje treba biti oprezan, i ne miješati uzroke bolesti

[3]Česta je uzrečica, ako ne razumijemo nečiju odluku: "Preispitaj malo svoju logiku"

[4]Značenje tog cilja je individualno. Za nekoga je to šator ili kamp prikolica. Ovisno o tome skup alternativa može sadržavati različite elemente. U izboru alternativa koristimo se i metodom eliminacije.

s bolestima odnosno njihovim posljedicama. Alternative nisu bolesti nego uzroci bolesti. Kao rezultat odluke dobiti ćemo, u najboljem slučaju, neki dominantni skup uzroka koje možemo ili ne prepoznati kao uzroke neke bolesti.

Ovdje je potraga za dokazima samo djelomično pod kontrolom liječnika jer ne može pacijenta pitati: "Dajte mi bar neke dokaze da se radi o čiru na želucu". Pacijent nije svjestan ni što su pravi znakovi bolesti, on se eventualno može žaliti na neki sekundarni znak, a kamoli da još povezuje uzroke i posljedice u tako složenom problemu.

Dijagnoza kvarova tehničkih uređaja je istog tipa s tom razlikom što je broj alternativa konačan.

1.1.3. *Znanstvena istraživanja.* Dobar dio naučnih metoda svodi se na testiranje hipoteza o prirodi nekog fenomena. Dokazi su ovdje promatranja i eksperimenti. Pasteur je na primjer zaključio da su uzročnici nekih bolesti bakterije nakon što je ustanovio da kuhanje kontaminiranih predmeta sprečava širenje bolesti — eksperiment. Također ih je promatrao i kroz mikroskop.

Za razliku od dijagnoze ovdje je situacija jednostavnija jer je potraga za dokazima manje-više pod kontrolom ali se ciljevi mijenjaju. Rješavanjem jednog problema može se naći odgovor na nešto sasvim drugo. U potrazi za dokazima znanstvenik je u sličnoj poziciji kao i liječnik, nema komu postaviti pitanje: "Daj mi rezultat koji podupire moju hipotezu".

Uzmimo kao primjer najnovija istraživanja iz evolucione biologije M. Profet [**30**] o mučnini u prvim mjesecima trudnoće. Smatra se da je to posljedica djelovanja hormona, ali zašto bi hormoni uzrokovali povraćanje i averziju na hranu radije nego npr. hiperaktivnost ili agresivnost. Frojdovsko objašnjenje da je to je posljedica averzije prema muževima i nesvjesna želja da žena oralno pobaci fetus je također nezadovoljavajuće.

Profet je pretpostavila da postoji neka korist od tako reduciranog unosa hrane u organizam. Funkcija povraćanja je sprečavanje unošenja toksina koje organizam izbacuje prije nego uđu u stomak i učine kakvu štetu fetusu. Na taj način organizam buduće majke štiti fetus od štetnog djelovanja toksina. Odrastao organizam razvio je sistem onemogućavanja štetnog djelovanja toksina dok fetus, organizam u vrlo delikatnom razvoju to nije. Početak trudnoće je vrlo osjetljiva razvojna faza ploda kad mu je potrebna stabilna okolina za razvoj.

Koja su sve opravdanja za tu hipotezu? Ne ulazimo u detalje jesu li niže navedena opravdanja prihvatljiva ili ne već želimo istaknuti strukturu razmišljanja u potrazi za argumentima. Uz tu hipotezu potrebna je bar još jedna, a to mogu biti i sve dosadašnje poznate hipoteze. Znanstvene istine[5]

[5]Znanstvena istinitost neke tvrdnje je relativan pojam i vremenski često ograničen.

koje govore u prilog hipotezi su sinteza stotinjak nezavisnih istraživanja. Navedimo neke od njih:

(1) Biljni toksini koje odrasli toleriraju mogu uzrokovati oštečenje ploda i pobačaj. Osim toga, jetra fetusa još nisu razvijena i unošenje toksina može narušiti djetetov hormonalni sustav;
(2) Mučnine počinju u trenutku kad se organi embrija počinju formirati i kad je embrio najranjiviji na teratogene (oštečenja uzrokovana kemikalijama), u tom trenutku embrio ima umjerenu potrebu za hranom;
(3) Mučnine prestaju u trenutku kad su organi embrija već formirani i kad počinje rasti potreba za hranom;
(4) Trudnice selektivno izbjegavaju jako začinjenu kao i novu hranu;
(5) Ženin osjet mirisa se pojačava u tom periodu i vraća se opet na normalu nakon što smetnje prestaju;
(6) Žene s pojačanim simptomima u manjoj mjeri rađaju defektnu djecu.

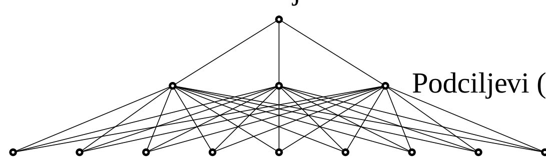
Uvjerljivo opravdanje znanstvene hipoteze je strukturirano kao mišljenje s ciljem. Za svaki dokaz koji govori u prilog jednoj od hipoteza potrebno je vidjeti govori li on u prilog drugoj hipotezi i u kojoj mjeri. Za svaku hipotezu potrebno je naći argumente koji govore njoj u prilog kao i one koji je opovrgavaju. Ako hipoteze nemaju zajednička opravdanja kao kriterije onda moraju imati neki viši zajednički smisao (sekundarni cilj). Ako se takvi ciljevi ne mogu naći onda je pitanje radi li se o hipotezama istih pojava.

1.1.4. *Učenje iz vlastitog ponašanja.* U mnogim životnim situacijama — u socijalnim kontaktima, na poslu, u školi, u porodici — učimo kako naše ponašanje utječe na druge i nas same. Takvo učenje u većini situacija dešava se i bez razmišljanja. U pozadini našeg djelovanja je traženje situacije, nazovimo je eksperiment, koji ima za posljedicu preispitivanje naših uvjerenja. Mogućnosti su ovdje razne akcije koje možemo poduzeti. Ciljevi su dvojaki: učenje o situaciji i postizanje trenutačnog zadovoljstva ili nagrade.

Primjer učenja iz ponašanja, koje je od velike važnosti u odgoju i obrazovanju, je učenje o postupcima u samim misonim zadacima — na primjer, u potrebi uočavanja razloga zažto bismo mogli imati krivo prije nego što zaključimo da imamo pravo.

Posljedice takvog učenja iz ponašanja su uvjerenja što je najbolje za postizanje raznih ciljeva u raznim situacijama. Ta uvjerenja dalje koristimo u pravljenju planova, scenarija i usvajanje osobnih ciljeva za kasnije odluke. Na primjer, ludi koji koji uočavaju da su omiljeni u društvu kad pričaju viceve, mogu usvojiti kao cilj razvijanje te osobine i traženje mogućnosti da je pokazuju.

1.1.5. *Hijerarhijska struktura.* U ciljnom razmišljanju ljudski um traži uvjerenje (dokaz) potpomognuto kriterijima da odredi koja je mogućnost najuvjerljivija. Hijerarhijska struktura ovakvog razmišljanja predstvaljena je slikom 2, s mogućnostima ili alternativama na dnu hijerarhije. Glavni cilj je na vrhu hijerarjije, zatim slijede podciljevi, kriteriji... svi elementi




SLIKA 2. Hijerarhija ciljnog razmišljanja.

odlučivanja grupiraju se u nivoe koji su linearno uređeni. Hijerarhija je *strukturno* i *funkcionalno* stabilna; strukturno, jer omogućava dodavanje i oduzimanje pojedinih elemenata a da se ne naruši cijela organizacija, a funkcionalno jer omogućava protok iformacija odozgo prema dolje. U pravilu se konkretniji elementi odlučivanja nalaze pri dnu hijerarhije, dok se općenitiji i neodređeniji nalaze pri vrhu. Širina utjecaja jednog nivoa je samo do njenog susjeda, tj. nivoa ispod. Elementi iz istog nivoa nemaju utjecaja jedni na druge.

Procedura rangiranja započinje od cilja kao kriterija s rangom 1. Za svaki element već rangiranog nivoa, kao kriterij, rangiraju se elementi nižeg nivoa sve dok i posljednji nivo ne bude rangiran. Pod *odlukom* na skupu od $n$ alternativa podrazumijevamo nenegativnu funkciju $w$, nazivamo je još i *rangiranje*, sa svojstvom $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Hijerarhijsku struktura kao model koriste mnoge metode odlučivanja, a najviše je korištena u Saatijevoj AHP metodi (Analytic Hierrarchy Proces), [**32**]. AHP metoda (sa svojim varijantama) jedna je od najkorištenijih metoda odlučivanja. Glavni je razlog njena fleksibilnost i prilagođenost velikoj većini korisnika putem vrlo dobro napisanog softvera *Expert Choice*. Mana metode jest ta da korisnik mora usporediti sve alternative što je vremenski i mentalno zahtjevno za korisnika. U posljednje vrijeme raste broj članaka koji osporavaju njenu afikasnost ali to ne obeshrabruje njezine korisnike.

### 1.2. Priroda racionalnosti.

> Ako kršenje zakona formalne logike vodi vječnom zadovoljstvu, onda ćemo to kršenje smatrati racionalnim (uz pretpostavku da svi težimo vječnom zadovoljstvu).
>
> Jonathan Baron, psiholog

Autor gore navedene izreke u svojoj knjizi *Thinking and Deciding* pojam ***racionalno razmišljanje*** označava bilo koju vrstu razmišljanja koje najbolje pomaže ljudima u ispunjavanju njihovih ciljeva. S praktičnog stanovišta to je beskorisna definicija jer ljudi ni sami nisu sigurni što je za njih dobro a što nije, a ta se kvalifikacija odnosi i na njihove ciljeve. S formalnog gledišta se pak postavlja pitanje kako usporediti 'efikasnost' dviju metoda, odnosni koja od njih 'bolje pomaže' u ostvarenju ciljeva. Teško da se gornja izreka može shvatiti kao definicija racionalnosti iz jednostavnog razloga što obuhvaća preširoko područje ljudske aktivnosti. Možda je bolje na nju gledati kao na uputu u kom smjeru treba gledati kod formalizacije ljudskog mišljenja.

Nije nerazumljivo što su ljudi, u težnji da proniknu u strukturu misli, prvo proučavali one ljudske aktivnosti koje su već same po sebi strukturirane, kao što je govor, pisani tekst, odlučivanje u sportu ili ekonomiji. Tu su ciljevi jasni i iskristalizirani tokom dugog vremenskog perioda upražnjavanja tih aktivnosti. Struktura govora i pisma podređene su što jasnijem prenošenju informacije. U tom smislu treba gledati i nove prodore u matematičkoj logici motivirane razvojem kompjutorske tehnologije. U sportu i ekonomiji postoje jasna pravila što se smije ili što se želi. Govorna i pisana komunikacija među ljudima su usko grlo u prenošenju informacija i struktura jezika podređena je mediju koji služi za komunikaciju. Isto se može reći i za komunikaciju među strojevima. Misaone strukture koje omogućavaju takvu komunikaciju slobodno možemo zvati *linearnim* ili *sekvencijalnim*.

Komunikacija čovjeka sa samim sobom je nešto posve drugo. Informacije i čuvstva čuvamo kao simbole i za procesiranje simbola u mozgu nije ih potrebno pretvarati u riječi ili neke druge artikulirane pojave. Donošenje vrlo složenih odluka može trajati nevjerojatno kratko i cilj teorije odlučivanja je razumijevanje upravo tih procesa. Brzina širenja električnih impulsa među neuronima je vrlo mala i ne igra nikakvu ulogu u brzini donošenja odluka. Ono što je očito važno je struktura i organizacija tog procesa

Konstrukcija *search–inference okvira* uključuje potragu za mogućnostima, uvjerenjima i ciljevima. Potraga i zaključivanje moraju biti *korektni* u smislu da nisu pod utjecajima drugih faktora osim ciljeva za razmišljane. Dobar donosilac odluke koristi najbolje metode zaljučivanja o čemu će biti govora u sljedećem poglavlju. U okvir moraju biti uključene sve mogućnosti; kakva je korist od odluke ako smo zanemarili neku od mogućnosti bilo zbog površnosti ili iz neznanja da i ta mogućnost vodi ka ispunjenju naših ciljeva. Isto je i s uvjerenjima. Nije dobro koristiti svoja uvjerenja na način da se favoriziraju mogućnosti koje su već same po sebi jake. Time stvaramo predrasude i onemogućavamo druge aspekte koji možda ne govore u prilog favoriziranih mogućnosti. Drugim riječima jako je važno biti *otvoren* i spreman promijeniti svoju misaonu strukturu ako se to pokaže potrebnim.

Racionalnost se odnosi na metode koje koristimo u mišljenju a ne na zaključke do kojih dolazimo. Racionalnost nije isto što i preciznost, a iracionalnost nije isto što i greška. Mi možemo koristit izvanredne metode i doći do katastrofalnih zaključaka ili koristiti slabe metode i, uz sreću, doći do ispravnih zaključaka. Isto tako može se govoriti i o racionalnosti socijalnih institucija i čitavih zajednica. Kriterij je, kao i kod pojedinaca, da li one donose kolektivne odluke koji zadovoljavaju ciljeve njihovih članova.

Kao što je već ranije rečeno racionalnost ne isključuje emocije. Emocije su samo neka vrsta uvjerenja. Loš osjećaj o izboru može biti i argument protiv. To je ujedno i signal da treba nastaviti potragu za novim uvjerenjima. Racionalnost nije sebičnost. Moralni ciljevi, uključujući i brigu za tuđe osjećaje, su ciljevi koje je pohvalno usvojiti kao naše vlastite. Čest je prigovor da racionalni ljudi nisu sretni. Sreća često uključuje samozavaravanje. Ako pobliže ispitamo nečija uvjerenja mogli bismo otkriti da dotični i nije tako uspješan, kompetentan ili voljen kao što misli.

Istraživanja i naše vlastito iskustvo pokazuju da ljudi ne slijede u potpunosti normativne principe. Da li to znači da je greška u modelu ili za to postoje neki drugi razlozi? U sljedećem poglavlju analizirati ćemo razloge takvog ljudskog ponašanja na izabranim primjerima. Zaista postoje situacije u kojima ljudi ispadaju racionalni, iako se čini da to nisu i obratno. Cilj teorije odlučivanja nije da kvalificira da li je nešto dobro ili loše već da razumije otkrije zbog čega ljudi smatraju da je $A$ bolje od $B$ i kakve su posljedice tog izbora.

## 2. Škola dobrog mišljenja

> Nije pitanje misle li strojevi, pitanje je čine li to ljudi.
>
> B. F. Skinner (bihejviorist)

**2.1. Formalna logika.** Mnogi autori uzimaju formalnu logiku kao normativni model mišljenja. U svakodnevnom riječniku sinonimi za 'logično' su 'racionalno' ili 'razumno'. Obrazovanje je prihvatilo logiku kao osnovu za izgradnju znanstvene misli. Pojmovi kao što su premisa, kontradikcija ili implikacija već su dio svakodnevnog rječnika.

U normativnom modelu mišljenja logika ima centralno mjesto. Ovdje nam nije cilj razvijati logičko mišljenje već ukazati potrebu za njim. Osnovni i najvažniji pojam u logici sudova je pojam 'istinitosti'. Svi smo u srednjoj školi čuli za semantičke tablice, neki su ih uzeli kao nešto prirodno i prihvatljivo, a neki u njih sumnjaju još i dan danas jer su ih naučili napamet. One nam omogućavaju, zajedno s pravilima izvoda da provjerimo vrijednost istinitosti suda (logičke formule), v. Vuković [**41**].

***Sud*** intuitivno shvaćamo kao izjavu koja može biti istinita ili lažna (ne oboje) i jedan od zadataka formalne logike je proučavanje operacija na sudovima i određivanje načina za provjeru njihove istinitosti. Prije nego li i formalno definiramo pojam istinitosti i interpretacije zadržimo se još trenutak na intuitivnom nivou.

2.1.1. *Valjanost forme zaključivanja.* Pravilo ili ***formu zaključivanja*** označavamo

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models Q$$

gdje sudove $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nazivamo ***pretpostavkama*** ili ***premisama***, a $Q$ ***zaključkom*** ili ***konkluzijom***. Gornji zapis čitamo: *$Q$ je logična posljedica od $P_1, P_2, \ldots, P_n$*. Forma zaključivanja je ***valjana*** ako je zaključak istinit kad god su premise istinite.

Definicija valjanosti ne kaže da premise moraju biti istinite i da zaključak mora biti istinit. Evo primjera:

*Svi psi imaju šest nogu.*
*Predsjednik je pas.*
$\models$ *Predsjednik ima šest nogu.*

Psi, bar oni kakve mi znamo, nemaju šest nogu niti je Predsjednik pas. Valjanost forme i dalje je prisutna, jer ona zahtijeva da, ako se 'kojim slučajem desi' da su premise istinite onda zaključak mora biti istinit. Ono što formu zaključivanja čini valjanom je njezina forma, zato kod provjere valjanosti nekog zaključivanja ne gledamo sadržaj nego formu. Formalizirani zapis gornjeg primjera je:

*Svi* $P$ *su* $Q$.
$x$ *je* $P$.
$\models x$ *je* $Q$

i u tom zapisu stoje apstraktne varijable umjesto sudova.

2.1.2. *Modus ponens.* Forma zvana ***modus ponens*** je specijalna forma[6] zaključivanja. U literarnom smislu *modus* je manifestacija ili forma, *ponens* znači potvrđivanje. Modus ponens bismo mogli prevesti kao forma potvrđivanja i njen je oblik:

*Ako* $P$ *onda* $Q$, $P \models Q$

ili simbolički pisano,

$$P \to Q, P \models Q$$

Argumenata zašto je modus ponens prihvatljiva forma ima više nego ova knjiga slova. U intuitivnom pristupu logici se ta forma zaključivanja uzima kao valjana forma.

Interesantna je priča od Lewis Carroll [**6**] u kojoj kornjača izaziva Ahila i prisiljava ga da snagom logike prihvati njene argumente[7]. Na kraju Ahil odustaje jer ga mudra kornjača uvlači u beskonačnu regresiju sve slabijih i slabijih argumenata.

2.1.3. *Logika sudova.* Osnovne logičke operacije (bulovski veznici) sa sudovima su sljedeće binarne operacije:

| | |
|---|---|
| $\wedge$ | konjunkcija (i) |
| $\vee$ | disjunkcija (ili) |
| $\to$ | implikacija (ako…onda) |
| $\leftrightarrow$ | ekvivalencija (ako i samo ako) |

i unarna opreacija

| | |
|---|---|
| $\neg$ | negacija (ne). |

U logici sudova polazimo od nekih osnovnih sudova koje ćemo zvati ***propozicijske varijable***. Uz pomoć bulovskih veznika i pomoćnih oznaka, zareza i zagrade, gradimo složene sudove ili ***logičke formule***. Pri tome je:

– svaka propozicijska varijabla $P, Q$ je formula ili atomarna (nedjeljiva) formula;

[6] Srodna forma joj je *modus tollens* ili negacijska forma.
[7] `http://www.wikipedia.org/wiki/Modus_ponens`

– Ako su $P$ i $Q$ formule tada su i $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ i $(\neg P)$ formule;
– nove formule se grade od 'starih' uz upotrebu konačnog broja veznika.

Ta pravila definiraju ***sintaksu*** logike sudova i ona nam naćin na koji se grade sudovi.

***Semantika***[8] se, u logičkom kontekstu, bavi istinitošću formula i navedena sintaktička pravila odreduju kao prvi korak semantike odredivanje vrijednosti istinitosti formula 'duljine jedan', tj. formula nastalih iz propozicijskih varijabli upotrebom jednog veznika. To se može kompaktno zapisati pomoću ***semantičke tablice***

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

DEFINICIJA 2.1. Svaku funkciju $I : \{P, Q, R, \ldots\} \rightarrow \{0, 1\}$ definiranu na skupu propozicijskih varijabli s vrijednostima u dvočlanom skupu $\{0, 1\}$ nazivamo ***interpretacijom.***

Sljedeći korak je proširiti interpretaciju $I$ na skup svih formula logike sudova. To je moguće učiniti koristeći semantičku tablicu indukcijom po duljini formule, v. Vuković [**41**]. Sada možemo i formalno definirati valjanost forme zaključivanja.

DEFINICIJA 2.2. Forma zaključivanja $P_1, P_2, \ldots, P_n \models Q$ je ***valjana*** ako je $I(Q) = 1$ za svaku interpretaciju $I$ za koju je $I(P_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Na kraju ovog odjeljka dokažimo da je modus ponens valjana forma zaključivanja. Treba dokazati da je za svaku interpretaciju $I$ za koju su premise istinite i zaključak istinit. Neka je $I$ interpretacija za koju je $I(P \rightarrow Q) = 1$ i $I(P) = 1$. Iz definicije interpretacije logičkog veznika $\rightarrow$ u semantičkoj tablici tada slijedi $I(Q) = 1$ što se i htjelo dokazati.

---

[8] `semanticos`, grč. značenje

### 2.2. Poteškoće u logičkom rezoniranju.

Onaj razum koji krivo
prosuđuje o stvarima,
ne zna dobro rasuditi
što je pravo, što pogrešno,
ni što treba učiniti,
a što pak ne učiniti —
takav razum naziva se
*strasnim* ili *rajasičnim*[9].

Bhagavad Gītā, XVII, 31

U tehničkom smislu formalna logika se ne odnosi na racionalnost općenito nego u zaključivanju o istinitosti neke tvrdnje iz istinitosti drugih tvrdnji baziranoj na formi, a ne na sadržajima tvrdnji. Analizirati ćemo nekoliko primjera pogrešnog zaključivanja u svakodnevnom životu i vidjeti da su poteškoće uglavnom psihološke naravi.

2.2.1. *Poteškoće s modus ponens.* U primjeru koji slijedi dana je jedna forma zaključivanja koje se često zamjenjuje s modus ponens.

PRIMJER 2.3. Čak je strastveni biciklist i redovito na posao ide biciklom. Svakog dana, pri dolasku na posao, portir zabilježi vrijeme njegovog dolaska na posao kao i vrijeme odlaska. Tokom niza godina portir je ustanovio da kad pada kiša Čak ne dolazi biciklom na posao i zaključio da:

*Ako pada kiša, Čak ne koristi bicikl.*

Jednog dana Čak je došao autobusom i portir je zaključio:

*Danas je Čak došao autobusom.*
*Znači da pada kiša.*

Kako je portireva kućica u unutrašnjosti velike hale koja služi kao parkiralište on nije primjetio da je tog dana padao snijeg. Njegov je zaključak očito bio kriv. Što je tu krivo? Formalizirajmo portirev zaključak:

$$P \to Q, Q \models P.$$

Umjesto $P$ i $Q$ stoje njegovi sudovi.

Koji su razlozi lošeg zaključivanja u primjeru? Jedan od njih je je vrlo vjerojatno dvosmislenost riječi `ako` u svakodnevnom govoru. Njeno *uvjetno značenje*, kao u izjavi *"ako $P$ onda $Q$"*, znači da je $Q$ istinito ako je $P$ istinito i ne isključuje se mogućnost da je $Q$ istinito ako $P$ nije istinito. Njeno *biuvjetno* značenje isključuje mogućnost da je $Q$ istinito kad $P$ nije

[9]`rajas`, skt. aktivnost.

istinito. Matematičari u tom slučaju govore `'ako i samo ako'` da se istakne biuvjetno značenje.

U svakodnevnom govoru iz konteksta se može naslutiti o kojem se smislu termina `'ako'` radi. Pretpostavimo da ja kažem: "Počet ću vikati ako ne zašutiš." Vi ćete biti vrlo vjerojatno iznenađeni ako ja počnem vrištati iako ste vi zašutili. U toj rečenici `'ako'` nosi biuvjetno značenje. Bez obzira na značenje, uvjetno ili biuvjetno, u izjavi: *"Ako $P$ onda $Q$ i $P$ je istinito,"* možemo *uvijek zaključiti $Q$*.

Da 'portireva forma' zaključivanja nije valjana vidi se i iz sljedećeg razmatranja. U formalnom, kao i u intuitivnom pristupu sud $(P \to Q)$ je istinit ako je $Q$ istinit. Pretpostavimo li da postoji bar jedan istinit sud $Q$ i pretpostavimo li da je 'portireva forma' valjana onda je svaki sud $P$ istinit. Zaista, $P \to Q, Q \models P$.

2.2.2. *Poteškoće s logikom sudova.*

PRIMJER 2.4. U svakodnevnom zaključivanju često možemo susresti sljedeću konstrukciju:

*Čovjek može biti znanstvenik.*
*Znanstvenik može biti astronaut.*
$\models$ *Marko može biti astronaut.*

Dobar donosilac odluke, međutim, traži argumente za i argumente protiv neke mogućnosti. Ako nađe primjer kad pravilo *nije primjenjivo* onda je našao *kontraprimjer*. Pokušajmo li s vrijednostima za $P$, $Q$ i $R$:

$P$ = muškarac,
$Q$ = znanstvenik/ca,
$R$ = žena,

dobivamo apsurdan zaključak da muškarac može biti žena.

Stoga zaključujemo da pravilo nije univerzalno primjenjivo, tj. nije valjana forma zaključivanja. Evo još jednog kontraprimjera za model rezoniranja u primjeru 2.4.

$A$ *je desno od* $B$.
$B$ *je desno od* $C$.
$\models A$ *je desno od* $C$.

Izgleda da je ovdje sve OK! A sad se zapitajmo što znači 'biti desno od'. Što ako $A, B, C$ sjede za okruglim stolom?

2.2.3. *Poteškoće s kvantifikatorima.* Osim u prethodna dva primjera, s logikom sudova ljudi izgleda da nemaju većih poteškoća. Intuitivno zaključivanje kojim se služimo u svakodnevnom zaključivanje izgleda da je tu dovoljno. Stvari nisu tako jednostavne kad se upletu kvantifikatori kao što su: *svaki, neki, postoji,...*

PRIMJER 2.5. Grupi studenata ponuđen je sljedeći logički zadatak: U sobi se nalaze arheolozi, biolozi i šahisti. Svi biolozi su šahisti. Niti jedan od arheologa nije biolog.

Većina studenata je zaključila da niti jedan arheolog nije šahista, što nije korektan zaključak. Niti jedan student nije zaključio da neki šahisti nisu arheolozi, što je valjan zaključak.

PRIMJER 2.6.

*Niti jedan $A$ nije $B$.*
*Svi $B$-ovi su $C$-ovi.*
*? — Zaključak — ?*

Mnogi će zaključiti: *"Niti jedan $A$ nije $C$"*, što je krivi zaključak. Psihologiju zanimaju razlozi takvog (krivog) zaključivanja.

Evo nekih objašnjenja za krivo zaključivanje u gornjim primjerima:

– Ljudi često 'izokrenu' jednu od premisa, v. Chapman (1959) [**8**]. Ako premisa kaže: *"Svi $A$-ovi su $B$-ovi"* onda on automatski shvaća i *"Svi $B$-ovi su $A$-ovi"*, što je krivo jer *"neki $B$-ovi ne moraju biti $A$-ovi."* Neka istraživanja govore u prilog toj hipotezi. Ceraso i Provitera [**7**] (1971) su reducirali dobar dio krivih odgovora postavljanjem jasnog pitanja u kojem umjesto *"Svi $A$-ovi su $B$-ovi"* stoji: *"Svi $A$-ovi su $B$-ovi, ali neki $B$-ovi mogu ne biti $A$-ovi".*
– Greške u zaključivanju nisu logičke greške već posljedica nerazumijevanja i krive interpretacije, Henle [**17**] (1962). Ljudi razmišljaju o istinitosti premisa, a ne o formi zaključivanja. Oni zapravo odbijaju riješiti logički zadatak jer njihov mentalni sklop ne prihvaća sve mogućnosti kao input. Tipični primjer tog fenomena je dan u Scribner [**33**, str. 490] (1977) u kojem je farmeru iz plemena Kpelle (zap. Afrika) postavljeno sljedeće pitanje:

  *Svi pripadnici Kpelle plemena uzgajaju rižu.*
  *G. Smith ne uzgaja rižu.*
  *Je li on pripadnik plemena Kpelle?*

  Odgovor:

  *Ne poznajem nikakvog g. Smitha. Nisam ga nikad upoznao.*

  Pitanje:

  *Ali razmislite o tvrdnji još jednom.*

  O:

  *Kad bih ga poznavao, mogao bih odgovoriti na pitanje. Pošto ga ne poznam osobno ne mogu ništa o njemu reći.*

  P:

*Ali poslušajte svoj vlastiti razum.*

O:

*Ako poznajete osobu i ako dođe pitanje o njoj tada možete odgovoriti na pitanje. Ali ako osobu ne poznate tada je teško bilo što reći o njoj.*

U ovom razgovoru ispitanik odbija prihvatiti premise kao osnovu za razmišljanje.

Scribner predlaže kao dobru vježbu za formalizirano mišljenje običnu aritmetiku. Ako djetetu postavimo pitanje: *"Janica ima tri olovke i dobije još dvije"* odgovor na pitanje: *"Koliko olovaka sada ima Janica?"* sigurno neće biti: *"Oprostite, ali ja Janicu ne poznam."*

2.2.4. *Poteškoće s negacijom implikacije.* Još jedna prepreka u korektnom zaključivanju su predrasude i ljudska sklonost da uočavaju situacije koje ih potvrđuju, a ne opovrgavaju. Tipičan primjer koji se prepričava u literaturi konstruirao je psiholog Peter Wason, [**42**], sa željom da ispita kako obični ljudi negiraju hipoteze.

PRIMJER 2.7. Četiri karte su položene na stol i svaka od njih ima na jednoj strani broj, a na drugoj slovo.

$$\boxed{\text{D}} \qquad \boxed{\text{F}} \qquad \boxed{3} \qquad \boxed{7}$$

Koje je karte dovoljno okrenuti da bi ispitali istinitost tvrdnje: *Ako karta ima slovo D na jednoj strani onda ima broj 3 na drugoj strani.*

Korektan odgovor je $\boxed{\text{D}}$ i $\boxed{7}$. Većina ispitanika izabrala je kartu $\boxed{\text{D}}$ ili karte $\boxed{\text{D}}$ i $\boxed{3}$. Karta $\boxed{3}$ je irelevantna, a $\boxed{7}$ je ključna karta jer ako je $\boxed{\text{D}}$ na suprotnoj strani onda pravilo nije istinito. Točne odgovore dalo je između 5 i 10 posto ispitanika. Iz njihovih odgovora se ne može zaključiti da su oni interpretirali "Ako D onda 3" kao "Ako D onda 3 i obratno" jer bi u tom slučaju okrenuli sve četiri karte.

U konkretniim životnim situacijama ljudi korektno zaključuju u većem postotku nego u ovom apstraktnom primjeru. Iskustvo ih uči da primjenju-ju usvojene modele u onim situacijama koje su česte u nihovom životu, a u sličnim situacijama zaključuju po analogiji. Na primjeru barmena koji ne smije prodavati pivo osobama od 18 godina to se lijepo vidi. Pitanje je koga će provjeravati: osobu koja pije pivo, osobu koja pije Coca Colu, dvadesetipetgodišnjaka ili petnaestgodišnjaka. Većina korektno zaključuje da treba provjeriti onoga koji pije pivo i petnaestgodišnjaka.

Ispitivanja su također pokazala, Leda Cosmides, [**9**], da ljudi korektno zaključuju ako je implikacija u obliku ugovora. Kršenje ugovora je situacija ekvivalentna postojanju varalice u baru. U ovoj situaciji gotovo da i nema pogrešaka jer je otkrivanje kršitelja ugovora vezano uz financijsku dobit i osobni interes.

Ljudi izgleda da imaju ugrađen mentalni modul za otkrivanje varalica, zaključuje S. Pinker, [**29**, str. 337]. Taj modul izgleda da ima "logiku" koja je obojena osobnim ciljevima i interesima. Evo primjera kako taj modul radi. Promatrajmo sljedeću implikaciju: "Ako zaposlenik dobiva penziju znači da je radio deset godina. Tko krši pravilo?" S točke gledišta zaposlenika tražit ćemo radnika s dvanaest godina staža bez penzije; s točke gledišta poslodavca tražiti ćemo one koji su penziju dobili nakon osam godina staža. Kad se formalna logika i logika otkrivanja varalice podudaraju ljudi djeluju poput logičara. Psiholozi evolucionisti ističu da je postojanje takvih mentalnih modula posljedica iskustva baziranih na osobnim ciljevima, a ne posljedica genetskog nasljeđa. To se posebno lijepo vidi u kreiranju mentalnog modela za matematiku koji isljučivo ovisi o obrazovnom sistemu i nastavniku matematike. Mnogi ističu da su djeca u SAD lošije obrazovana od djece u drugim industrijski razvijenim zemljama upravo zbog nebrige društva za obrazovanje. Ako nastavnik kreira okuženje u kojem je učenik potaknut na samostalno vježbanje, "drill" i na interaktivnu komunikaciju s nastavnikom tada će moći razviti mentalne matematičke koncepte za koje je, u historijskom smislu, potrebno i više tisuća godina.

**2.3. Potraga za racionalnošću.** Formalna logika, bez obzira na njenu normativnu važnost u donošenju zaključaka, gotovo da se i ne koristi u svakodnevnom životu. Jedan od razloga je taj što je za logičko zaključivanje potreban trening ili bar neka vrsta formalnog obrazovanja, a drugi je što su premise u svakodnevnom životu, na temelju kojih bi trebali donijeti zaključak, nejasno formulirane ili čak nepoznate. Osim toga, svojim osobnim stavovima i emocijama, čak i ako su premise sasvim određene i jasne, ljudi izbjegavaju logičan zaljučak vođeni nečim 'što je jače od njih samih'. Poteškoće su više psihičkog nego formalnog karaktera.

2.3.1. *Mentalni modeli.* Formalna logika, po svojoj prirodi, nije potpuna teorija mišljenja. Pošto se bavi samo zaključivanjem nije u stanju objasniti uzroke grešaka u zaključivanju i dati upute kako ih otkloniti. Razmatranje logičkih problema i analiza ljudskih postupaka pri njihovom rješavaju je dobar primjer koji govori u prilog strukturiranog mišljenja o kojem smo već govorili, a to je ciljno mišljenje. Johnson–Laird i dr. ([**18**], [**20**], [**19**]) je svojim ispitanicima zadavao hipotetičke silogizme[10], zapravo

[10]Hipotetički silogizam je valjana forma $P \to Q, Q \to R \models P \to R$.

samo premise, i promatrao kako ljudi donose zaključak na temelju danih premisa. Njegov je zaključak da ljudi kreiraju mentalne modele (primjere) koji opravdavaju njihov zaljučak. Pažljivi mislilac će potražiti alternativni mentalni model, kontraprimjer[11], u kojem njegov zaključak nije istinit i ako ga ne nađe zaključuje da je zaključak korektan. Vrlo malo ispitanika pokušava naći i treći alternativni model koji bi potvrdio ili opovrgnuo njegovu formu zaključivanja.

PRIMJER 2.8. Evo jednostavnog primjera:

Svi umjetnici su društvenjaci.
Svi društvenjaci su spavalice (jer kasno liježu).

Da bi donijeli zaključak na temelju danih premisa mi zamišljamo neku vrstu mentalnog modela. Zamišljamo nekoliko osoba $U$ (umjetnika) i nekoliko osoba $D$ (društvenjaka) i ustanovimo na primjer da je

$$U = (D)$$

gdje zagrada znači da neki od društvenjaka nisu umjetnici. Zatim zamišljamo drugi mentalni model i zaključimo da je

$$D = (S)$$

gdje $(S)$ u zagradi znači znači da neki od spavalica iz našeg modela nije društvenjak. Pokušavamo li naći neki drugi mentalni model ustanoviti ćemo da ga ne možemo baš tako jednostavno naći i donijeti zaključak:

Svi umjetnici su društvenjaci
Svi društvenjaci su spavalice
$\models$ Svi umjetnici su spavalice

Istraživanje također pokazuje da ljudima predstavljaju poteškoću oni silogizmi u kojima je izokrenut redoslijed premisa. Tako na primjer ljudi neće imati poteškoća donijeti bilo kakav zaključak na temelju premisa:

Neki $A$ je $B$
Svi $B$ su $C$

dok će imati poteškoća s premisama:

Neki $B$ je $A$
Svi $B$ su $C$

U sljedećem, malo težem primjeru,

Neki $A$ su $B$
Neki $B$ su $C$

[11]Kontraprimjer nije ništa drugo nego konstrukcija ili model jedne interpretacije za koju zaključak, u formi zaključivanja, nije istinit iako su premise istinite.

ispitanici su dali više primjera. Najčešći je onaj u kojem su zaključivali da su neki od $A$-ova $B$-ovi i da su *neki od tih* $B$-ova $C$-ovi što je greška. Oni koju su išli dalje u potrazi za modelima došli su do sljedećeg modela

$$\begin{aligned}&(A) = B\\&(B) = C\end{aligned}$$

koji vodi na zaključak da oni $A$-ovi koji su $B$-ovi ne moraju nužno biti $C$-ovi pa je konačan zaključak da se ništa suvislo ne može zaljučiti o vezi između $A$-ova i $C$-ova, što je korektan zaključak.

Što pokazuju ovi primjeri? Kao prvo, izgleda da ljudi a priori prihvaćaju više mogućnosti, bilo kao kandidata za rješenje problema ili kao put ka konačnom rješenju, a zatim nalaze dodatne argumente ili za eliminaciju ili za prihvaćanje svake od mogućnosti.

U prilog mentalnih modela govori i istraživanje Galotti, Baron i Sabini [**15**]. Njihovi ispitanici su bili podvrgnuti rješavanju niza logičkih problema. U početku je vrijeme rješavanja bilo ograničeno, a nakon toga je omogućeno svakom ispitaniku da ispravi svoj zaključak ako smatra da nije korektan. Dobri rješavači su trošili u prosjeku dvostruko više vremena na rješavanje od loših jer su provjeravali svoje zaključke na više mentalnih modela. Oni su također češće korigirali svoje zaključke koje su donijeli u prvoj fazi kad je vrijeme bilo ograničeno jer je za pronalaženje novih mentalnih modela ipak potrebno vrijeme.

2.3.2. *Formalizacija svakodnevnog zaljučivanja.* Jedan pokušaj formalizacije zaključivanja u svakodnevnom životu dao je Toulmin [**36**]. Osnovna struktura zaključka, prikazana shematski na slici, ima četiri osnovna elementa: ***podatak, tvrdnju, razlog*** i ***pozadinu.***

PODATAK ⟶ TVRDNJA

RAZLOG

POZADINA

Na primjer, u rečenici:

"Pietro je rođeni Sicilijanac. Sigurno ima crnu kosu,"

*podatak* (činjenica) je da je Pietro rođen na Siciliji. *Zaključak* je da ima crnu kosu. *Razlog* ovdje nije eksplicitno iskazan, a mogao bi biti: "Svi Sicilijanci imaju crnu kosu," *Pozadina* je opravdanje za takav razlog i u ovom slučaju bi pozadina mogla biti: "Svi Sicilijanci koje sam vidio imali su crnu kosu."

Primijetimo riječ 'sigurno' koja prethodi zaključku. Toulmin ju je nazvao ***kvalifikator*** jer potencira, sugerira, prihvaćanja zaključka. Kvalifikator implicitno unosi i mogućnost ne prihvaćanja zaključka pod izvjesnim okolnostima. Te su okolnosti nepovoljne za zaključak i ne govore njemu u prilog. Toulmin ih naziva *rebuttal* što bismo mogli prevesti kao *opovrgavanje*. U ovom slučaju to bi mogla biti činjenica da su Pietrovi roditelji stranci. Proširena forma gornjeg zaključka je:

> "Pietro je rođeni Sicilijanac. Kako Sicilijanci uglavnom imaju crnu kosu, što sam zaključio iz vlastitog promatranja, to sigurno i Pietro ima crnu kosu, osim ako mu roditelji kojim slučajem nisu stranci."

PODATAK ⟶ KVALIFIKATOR, TVRDNJA

RAZLOG REBUTTAL

POZADINA

Primijetite da *opovrgavanje* počinje s riječi 'osim'. Drugi mogući kvalifikatori su: 'vjerojatno', 'očito',...

Toulminov formalizam je specijalni oblik hijerarhijske strukture o kojoj smo već govorili. *Podatak* odgovara *uvjerenju*. Ako je *mogućnost* sugerirana uvjerenjem tada slobodno možemo identificirati *tvrdnju* i *mogućnost*. Ako *kvalifikator* nije potreban znači da je uvjerenje dovoljno za prihvaćanje mogućnosti i razmišljanje tu prestaje. Ako je kvalifikator potreban tada u razmatranje ulaze druge mogućnosti. Toulmin uvažava druge mogućnosti samo kroz rebuttal, dok hijerarhijska struktura mišljenja mogućnosti smatra (kvalitativno) ravnopravnima. U Toulminovoj strukturi *cilj* nije istaknut. Uvođenjem novih *razloga* za istu tvrdnju značilo bi uvođenje novih *ciljeva*, a time i novih *mogućnosti*. Ovisno o razlozima *tvrdnje-mogućnosti* mogu imati veću ili manju 'težinu'. Iako predstavlja poopćenje logičkih formi zaključivanja Toulminov je pristup ograničen u smislu da se bavi zaključivanjem a ne potragom za mogućnostima.

Razlozi mogu biti specifični za određena područja kao što su: zakonodavstvo i državne službe, znanost, ljudsko ponašanje općenito ili održavanje odeđenih sistema, aparata i naprava. U tablici 2.1 dana je klasifikacija[12] razloga prema Voss i dr. [**40**, Vol. 1, str. 213].

[12] Ovo je nešto prerađena klasifikacija i nije identična izvornoj.

| Tip razloga | Definicija tipa | Primjer |
|---|---|---|
| Meta | Zasnovan na metodama rješavanja problema | Rješavanje problema zahtijeva određivanje uvjeta na parametre. Za funkcionalnu jednadžbu u matematici to bi značilo određivanje područja definicije i vrijednosti za transformacije kojima je podvrgnuta varijabla. |
| Logički | Zasnovan na logičkom razmišljanju i common sense | Ako je pristup neefikasan trebalo bi potražiti novi. |
| Zakonski | Zasnovan na zakonskim uredbama i sudskoj praksi | Presuda bi mogla biti poništena na višestepenom sudu jer nije poštivana procedura u prikupljanju dokaznog materijala. |
| Psihološki | Zasnovan na općim principima ljudskog ponašanja | Ljudi bolje i više rade ako su motivirani. |
| Analogni | Zasnovani na poznavanju funkcioniranja drugog sličnog sistema | U Latinskoj Americi, seljaci nalaze ekstra legalne načine za dodatnu zaradu. To je vjerojatno istina i za Hrvatsku. |

TABLICA 2.1. Klasifikacija razloga prema Vossu.

2.3.3. *Mentalni modul za vjerojatnost.* O mentalnom modulu za matematiku i modulu za otkrivanje varalice bilo je ranije govora[13]. Uz ta dva modula posebno je važan modul za vjerojatnost koji ima ključnu ulogu u donošenju odluke što je i glavna tema ove knjige. Njime ćemo se detaljnije pozabaviti.

Ljudi vole predviđati buduće događaje. Ako se neki događaj već ponavljao u prošlosti tada u tom sljedu događanja oni pokušavaju pronaći zakonitosti i na temelju njih predvidjeti budućnost. Vjerojatnost je priručna, intuitivno jasna i često jedina moguća tehnika. Osnivači teorije vjerojatnosti, kao i osnivači formalne logike, vjeruju da su samo formalizirali zdrav razum (eng. common sense). Često se događa da taj zdrav razum govori suprotno od onoga što ljudi odluče. Razlog tome leži u psihološkoj

[13] Vidi odjeljak 2.2.4 na str. 66

obojenosti odluke koja je više projekcije njihovih želja a može biti i posljedica krive interpretacije pojma vjerojatnosti. Evo nekoliko primjera iz svakidašnjeg života koje su sakupili matematičar Amos Tverski i psiholog Daniel Kahneman.

- (*Porez na budale*) Ljudi uplaćuju loto i ostale igre na sreću u ogromnim novčanim iznosima. Oni možda nisu svjesni da organizator mora osigurati izvjesnu dobit i da igrač u prosjeku mora izgubiti.
- Strah od aviona je veći nego strah od automobila iako statistika govori da je postotak poginulih/unesrećenih u cestovnom prometu daleko veći. Isto se tako boje i nuklearne energije iako je broj stradalih od ugljena daleko veći.
- (*Kockareva zabluda*) Mnogi su uvjereni da ako je kuglica na ruletu šest puta za redom pala ne crveno polje da je sedmi put *dužna* pasti na crno iako kuglica nema memoriju.
- (*Vjerojatnost bolesti*) Sljedeći problem je zadan studentima i osoblju Harvardske medicinske škole: "Test za ispitivanje bolesti čija je pojavnost 1/1000 ima lažno pozitivnu procjenu od 5% što znači da u 5% slučajeva test sugerira bolest iako je osoba zdrava. Koja je vjerojatnost da osoba koja ima pozitivan test boluje od te bolesti? Najčešći odgovor je bio 0.95 iako je korektan odgovor 0.0196. Pretpostavljamo da je $P(BT) = P(B)$ tj. da nema lažno negativnih nalaza na testu[14].

  Rješenje lako nađemo pomoću Bayesove formule. Neka je $B$ dio bolesne populacije, $Z$ dio zdrave populacije i $P$ vjerojatnost. Zadano je $P(B) = 1/1000$, $P(T/Z) = 0.05$, a $P(B/T)$ se traži. Tada je

  $$P(B/T) = \frac{P(BT)}{P(BT) + P(ZT)} = \frac{1}{1 + \frac{P(ZT)}{P(BT)}} = 0.0196.$$

  Jedan od uzroka pogreške je taj što ljudi krivo interpretiraju pojam *lažno pozitivna procjena* kao postotak pozitivnih rezultata na testu koji dolazi od zdrave populacije umjesto postotka zdravih ljudi na kojima je test pozitivan. Najveći je problem što ljudi ignoriraju vjerojatnost $P(B) = 0.001$ koja im kazuje da se radi

[14] Praksa pokazuje da to nije istina i da svaki test ima i lažno pozitivne i lažno negativne nalaze. Međutim, lako se pokaže da u slučaju kad je $P(BT) < P(B)$ onda je

$$\frac{1}{1 + \frac{P(ZT)}{P(BT)}} < \frac{1}{1 + \frac{P(ZT)}{P(B)}}$$

što znači da je vjerojatnost bolesti, u slučaju kad test ima lažno negativnih nalaza, manja od izračunate.

o rijetkoj bolesti pa misle da je malo vjerojatna čak i za osobu s pozitivnim testom. To je zabluda tipa: "Ako zebra ima pruge onda je životinja s prugama zebra." Ispitivanja su pokazala da mnogi liječnici plaše svoje pacijente ako imaju pozitivan test za rijetke bolesti.

- (*Stereotip*) "Sanja ima 31 godinu, neudata je, bistra i bez dlake na jeziku. Završila je filozofiju na Sveučilištu u Zagrebu. Kao student bila je žestoki borac za pravdu i sudionik antiratnih demonstracija. Kolika je vjerojatnost da je Sanja bibliotekarka? Kolika je vjerojatnost da je Sanja bibliotekarka i borac za ženska prava?" Češći su odgovori da je Sanja bibliotekarka i borac za ženska prava nego da je Sanja bibliotekarka, što nije moguće jer je vjerojatnost presjeka dva skupa manja ili jednaka vjerojatnosti svakog od skupova koji čine presjek.

  Socijalni psiholozi zaključuju da ljudski um nije u stanju doseći zakone vjerojatnosti, iako su univerzalni. Um može procesirati vrlo malo informacija i umjesto da "izračunava teoreme" on koristi stečena pravila. Jedno od pravila je: "Ono čega se sjećam je vjerojatnije da se desi." Sjećam se strašne avionske nesreće prije deset godina, stoga su letovi jako opasni. Drugo je pravilo: "Ako je nešto (netko) bliže stereotipu veća je vjerojatnost da spada u tu kategoriju." Sanja je po opisu bliža bibliotekarki borcu za ženska prava nego bibliotekarki.

Zablude koje navode Kahneman i Tversky su među najprovokativnijima u psihologiji. Gotovo nevjerojatno zvuči da nekoliko triliona sinapsi u mozgu nije u stanju isprocesirati jednu Bayesovu formulu. Kako bilo da bilo, ljudsko razmišljanje nije tako glupo kako to izgleda u prethodnim primjerima. Kockareva zabluda je zabluda samo u kockarnici i rijetko je zabluda u životu. Kockarska mašina je savršeno napravljen stroj koji generira događaje neovisno o povijesti[15] i od čovjeka koji voli predviđati lako napravi budalu. Zaključiti da je čovjek u zabludi na temelju *kockareve zablude* je jednako krivo kao reći da su ljudske ruke loše napravljene jer nisu u stanju napraviti avion.

Vjerojatnost kao broj pridružen nekom događaju, koji ima smisla samo kao procjena subjektivne pouzdanosti, je danas uvriježen način komuniciranja: sutra će padati kiša s vjerojatnošću 30%, Hajduk će u finalu kupa pobijediti Dinamo s vjerojatnošću 60%. Ljudski um je razvio osjećaj za vjerojatnost kao relativnu frekvenciju na dugu stazu, a ne kao broj koji pokazuje pouzdanost jednog jedinog događaja. Vjerojatnost, kao matematička disciplina, je započeta u 17 st., a upotreba postotaka je došla kasnije,

[15] U vjerojatnosti se takvo nešto naziva generator slučajnih brojeva.

nakon francuske revolucije i uvođenja metričkog sistema i prvobitno se koristila samo kao izraz za kamatne stope i visinu taksi. Sam pojam *vjerojatno* naši su preci doživljavali iskustveno kao mjeru očitovanja nekog događaja na temelju pojavljivanja istog u prošlosti. Poteškoća kod donošenja odluke je li pacijent bolestan kao i u problemu stereotipa (što je Sanja) leže također i u lošoj formulaciji zadatka koji ne odgovara intuitivnoj predodžbi vjerojatnosti kao frekvenciji. Postoji samo jedna Sanja i ona je bibliotekarka ili nije bibliotekarka. "Vjerojatnost da je ona bibliotekarka" nije izračunljiva. Pogledajmo iste probleme ali drugačije formulirane. Jedan od tisuću Evropljana ima specifičnu bolest, pedeset od tisuću zdravih ljudi ima pozitivan test. U uzorku od tisuću ljudi, koliko test-pozitivnih boluje od te bolesti? Stotinu ljudi odgovara Sanjinom opisu, koliko ih je bibliotekara, koliko ih je bibliotekara i feministica? Na ovako formulirana pitanja većina ljudi—čak do 92%—daje ispravan odgovor.

U posljednje vrijeme učestalost HIV-a, virusa AIDS-a, van rizične skupine je 0.01%, a lažno pozitivnih testova je 0.01%. Uz takvu preciznost testa, izgled pacijenta da ima AIDS (uz pozitivan test) je velik. Pogledajmo problem s druge strane. Od 10 000 ljudi van rizične skupine očekujemo da je jedan zaražen HIV-om. Od preostalih 9 999 ljudi još jedan ima pozitivan test. Dakle, imamo dva s pozitivnim testom. Ako ste vi jedan od njih onda je šansa 50-50 da imate AIDS. Ovako formulirane probleme bolje razumiju i liječnici i pacijenti kao i sudionici drugih tipova odlučivanja kao što su sudske presude, na primjer.

Shvaćanje vjerojatnosti kao relativne frekvencije, s druge strane, postaje besmisleno ako se radi o pojedinim slučajevima. Kakvog smisla ima računati relativnu frekvenciju ako ne znamo od čega. Richad von Mises, pionir teorije vjerojatnosti dao je lijep primjer. U uzorku američkih žena između 35 i 50 godina, kod 4 od 100 njih razvije se rak dojke u periodu od godine dana. Znači li to da gđa Smith, 49 godišnja lady ima 4% šanse da oboli od raka dojke u sljedećih godinu dana? Nema odgovora. Pretpostavimo da u uzorku žena od 45 do 90 godina, u koji spada gđa Smith, 11 od 100 oboli od raka dojke unutar godine dana. Da li je šansa gđe Smith da oboli od raka dojke sada 4% ili 11%? Pretpostavimo da je i njena majka imala rak dojke, a 22 od 100 žena između 45 i 90 godina čija je majka imala rak dojke oboljeva od iste bolesti. Da li je njena šansa 4%, 11% ili 22%? Ona je i ovisnik o cigareti, ima dvoje djece, grčkog je porijekla. . . Ako postoje samo dvije žene na svijetu i jedna ima rak dojke može li se reći da gđa Smith ima 50% šanse da oboli od raka dojke? U graničnom slučaju klasa koja u svemu opisuje gđu Smith je ona sama. U jednočlanom skupu relativna frekvencija gubi svaki smisao.

Ova filozofska rasprava o značenju vjerojatnosti nije akademska i utječe na naše odluke. Godine 1995. odvjetnik branitelj na jednom sudskom procesu za ubojstvo je izjavio da među muževima koji tuku svoje supruge, samo 1/1000 ide tako daleko da je i ubije. U pismu časopisu *Nature*, jedan je statističar istaknuo da među muževima koji tuku svoje supruge *i čiju je suprugu netko ubio*, više od 50% ih je ubojica. Primjer gđe Smith nije *matematička tvrdnja* koja je lažna ili istinita i oni koji traže odgovor nisu u zabludi. Odluke i predviđanja o pojedinačnim događajima ne može izračunati računalo. One moraju biti analizirane vaganjem dokaza, ispitivanjem uvjerljivosti argumenata, jasnijim sagledavanjem uz pomoć neke druge formulacije i svim ostalim tehnikama koje mi smrtnici koristimo za predikciju nepoznate budućnosti.

Psiholog Gigerenzer je predložio "psihološko poimanje" vjerojatnosti kao *stupanj uvjerljivosti, jamčevinu, predočene informacije*. Takva definicija vjerojatnosti nalazi se i u nekim rječnicima a koristi se i u sudnici.

## 3. Uloga emocija u odlučivanju

> Iz uma, isključivo iz njega izvire zadovoljstvo, sreća, smijeh i šala, jednako kao i naša tuga, bol i jad.
>
> Hippocrates

Emocije su zasigurno jedan od važnijih aspekata spoznaje koji je dobrim djelom bio ignoriran od strane "spoznajnih, kognitivnih znanosti" današnjeg vremena. O prirodi emocija u psihologiji se raspravlja već cijelo stoljeće. Formalna debata počinje pitanjem Williama Jamesa: Bježimo li od medvjeda jer smo uplašeni ili smo uplašeni jer trčimo? James sugerira da smo uplašeni jer trčimo i samo je upola u pravu.

Psihološka rasprava o emocijama se fokusirala na pitanje što uzrokuje subjektivna stanja naše svijesti koja zovemo *osjećaji* ili *emocionalna iskustva*. Teorije emocionalnog iskustva uglavnom se razlikuju po tome koliko različitih emocionalnih stanja postoji i grupiraju ih u nekoliko kategorija ovisno o tome kako ih interpretiraju: *teorije povratne sprege*, *centralne*, *teorije pobude* i *spoznajne teorije*. Iako vrlo različite u pristupima svaka od tih teorija pretpostavlja da je emocionalno iskustvo posljedica ranijeg emocionalnog procesa. Feedback teorija i teorija pobude pretpostavljaju da mozak detektira emocionalno značajne događaje i na poticaj proizvodi odgovarajući odgovor koji zatim služi kao signal za određivanje sadržaja emocionalnog iskustva. Centralne i teorije kognitivne (spoznajne) procjene pretpostavljaju da je emocionalno iskustvo zasnovano na prethodnoj procjeni situacija; te procjene tada određuju sadržaj iskustva.

Iako različite, sve te teorije ukazuju na isti mehanizam — sistem procjene koji odeđuje je li neka situacija potencijalno štetna ili korisna za pojedinca. Pošto su te procjene prethodnica svjesnog emocionalnog iskustva znači da to moraju nužno biti nesvjesni procesi. Ti procesi su zanemarena polovica u Jamesovom razmatranju, tj. mi bježimo od medvjeda jer naš mozak signalizira da bi medvjed mogao biti opasan.

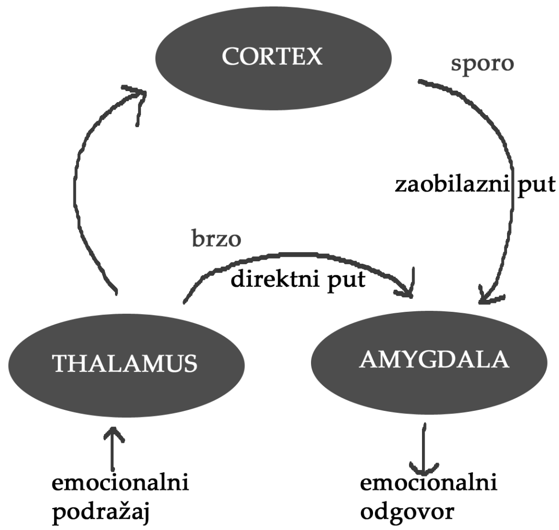
Današnje teorije o emocijama uglavnom se slažu da one izgrađuju moćan sistem koji utječe na zapažanja, učenje i racionalno donošenje odluka kojeg nazivamo *motivacija*. Motivacija i emocija služe kao filteri koji vode zapažanja i utječu na procjenu važnosti zapažene informacije, Buck [**5**]. Nestabilna stanja se javljaju u svakom sistemu za procesiranje informacija kad nema dovoljno sredstava (načina) da se zadovolje sadašnji i viši ciljevi. To se može desiti ne samo na nivou ciljeva nego i na svim ostalim nivoima jer ciljevi utječu na ponašanje sistema i izbor akcije. Sistem mora biti u stanju prepoznati ta emociji slična stanja (eng. emotion-like) ili učiniti neki kompromis u izvršavanju zadataka. Stoga je važno razumjeti utjecaj emocija na donošenje odluka, kako za razumjevanje ljudskog ponašanja tako i za potporu zaključivanja automata i njihove autonomije.

U čemu sa današnji znanstveni pogledi na emocije slažu? Što se filozofskog pristupa tiče, teorije o emocijama trebale bi uvažiti u obzir sljedeće karakteristike emocija:

(1) emocije su uglavnom svjesnog karaktera;
(2) one uključuju više iskrivljenih tjelesnih manifestacija nego bilo koje drugo svjesno stanje;
(3) podložne su promjenama u intenzitetu, tipu i širini objekata koje uključuju . . .
(4) bije ih glas da su emocije u suprotnosti s racionalnošću;
(5) igraju izuzetno važnu ulogu u određivanju kvalitete života pojedinca;
(6) značajno doprinose definiranju naših ciljeva i prioriteta;
(7) imaju ključnu ulogu u regulaciji društvenog života;
(8) imaju centralnu ulogu u odreživanju životnih i moralnih stavova.

Ovdje nećemo opisivati neuralne osnove emocija, čitaoca upućujemo na članak Emotional Circuits, LeDoux i dr. [**13**] ako ga to zanima, već ćemo dati kratki pregled trenutačnih spoznaja o prirodi emocija i razmatrati neke pokušaje koji su doveli do računalne implementacije aspekata emocija.

**3.1. Emocionalni krug, LeDoux.** LeDoux koristi pojam emocionalno procesiranje za način na koji nam naš mozak omogućava da preživimo,




ostanemo zdravi, nalazimo hranu ili partnera. Tvrdi da mora postojati krug između ulaznog i izlaznog sistema koji prevodi informacije iz okoline u specifične odgovore kad dođe do određene vrste pobude. Emocija može biti definirana kao proces kojim naš mozak može odrediti ili izračunati vrijednost pobude i predložiti da se nešto poduzme nakon toga.

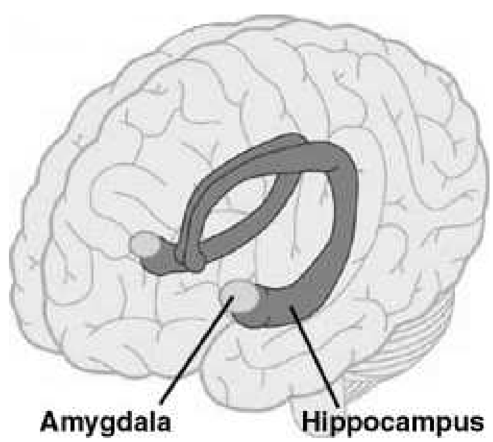
Informacija prihvaćena od našeg senzornog aparata dakle aktivira emocionalni krug koji vrednuje značaj pobude i aktivira odgovor. Taj krug se aktivira samo na odgovarajuću ulaznu pobudu, a ta detekcija ulaznog signala i reakcija kruga dešavaju se na podsvjesnom nivou, automatski. Pokretanje emocionalnog odgovora odvija se na dva načina: brzo, tj. direktno od talamusa do amygdale ili sporo, na način da je informacija procesirana prvo u moždanoj kori i zatim proslijeđena amygdali.

Aktiviranje emocionalnog kruga ima dvije posljedice. Jedna je automatski programiran odgovor, na primjer bijeg ispred medvjeda, a druga je aktiviranje ciljno orijentiranog sistema zasnovanog na iskustvu ili donošenje trenutačne odluke. Na primjer, ako smo gladni možemo doći do hrane na različite načine od kojih niti jedan nije nužna posljedica iskazane potrebe za hranom.

Iako je LeDouxova teorija emocionalnog iskustva zasnovana na proučavanju straha, može poslužiti i kao opća teorija koja je primjenjiva za sve vrste emocionalnog iskustva: ljutnju, veselje, mržnju ili ljubav. U emocionalno nabijenim situacijama pojavljaju se još i druge pobude (zvuk, njuh, svjetlo) koje su također važne i određuju kontekst emocije. Kontekst je psihološki koncept, neka vrsta usputne memorije o raznim faktorima koji određuju emocionalnu situaciju.

**3.2. Hipoteza o tjelesnim pokazateljima, Damasio.** Jedna od poznatijih hipoteza o prirodi emocija je hipoteza o tjelesnim pokazateljima (Somatic Marker Hypothesis) koja tvrdi da odluke donešene u situacijama koje mogu biti potencijalno štetne ili pak povoljne, a slične su prethodnim iskustvima, uzrokuju tjelesnu reakciju koja obilježuje ishod. Kada se slična situacija opet pojavi, tjelesni pokazatelj će signalizirati opasnost ili povoljnost. Stoga, ako je negativni tjelesni pokazatelj vezan uz određen budući ishod on služi kao poziv na uzbunu i oprez kod poduzimanja takve akcije. Ako je pak pozitivni tjelesni pokazatelj vezan uz taj ishod onda je on poticaj i podupire takvu akciju. Glavni zagovornik tog pristupa je A. Damasio [**11**] koji definira *emociju* kao poremećaj stanja skupa varijabli ljudskog tijela, uzrokovan nekom situacijom ili mislima. Te varijable uključuju, na primjer, krvni pritisak, aktivnost endokrinih žljezda, mišićne parametre... S druge strane, *osjećaj*, prema Damasiju, je asocijacija emocionalnog iskustva s mentalnom slikom situacije koja ju uzrokuje. Više o tome pogledaj na str. 81.

**3.3. Limbički sistem.** Limbički sistem nije struktura već nakupina nervnih puteva smješenih duboko unutar moždane polutke (po jedna u svakoj, dakle dvije ukupno), čiji su glavni dijelovi *amygdala* i *hippocampus*. Gledajući iz današnje znanstvene perspektive, od svih moždanih centara amygdala je najuže povezana s emocijama, LeDoux [**26**]. To je najvažnija komponenta mrežne strukture koja obrađuje emocionalne informacije. Osim povezanosti s moždanom korom, bijelom materijom i 'brainstem' dobro je povezan i sa autonomnim nervnim istemom kao i sa endokrinim žlijezdama. Osnovna mu je zadaća kontrola i izražavanje raspoloženja i



emocija, procesiranje i smještavanje kratke memorije te kontrola apetita i emocionalnih odgovora na hranu. Što se emocija tiče, funkcija ove strukture je u pridjeljivanju važnosti emocionalnoj pobudi. Jednostavnije rečeno, svaka nova pobuda se obradi u amygdali koja objavljuje ostatku mozga radi li se o nečem ugodnom ili pak opasnom po organizam.

3.3.1. *Kako amygdala zna što je dobro a što loše po organizam?* Preprogramirani obrasci ponašanja su zapisani u neuralnoj mreži koja je izgrađena u vrijeme razvoja nervnog sistema i mogu se smatrati nasljednima, na primjer obrambene reakcije, seksualni nagoni i dr. To su one emocije koje je Damasio [**10**] nazvao primarnim emocijama. Sekundarne emocije svatko za sebe usvaja tokom života, to je njegovo iskustvo. Pobude koje su u principu neutralne poprimaju neki karakter, postaju emocionalno obojane. To nastaje stoga jer povezujemo objekte i situacije s kojima dolazimo u kontakt s primarnim emocijama. Rezultat toga je da svaka kombinacija podražaja u nekom trenutku posjeduje određen emocionalan naboj koje je manje više svjestan.

3.3.2. *Kako amygdala organizira odgovor na emocionalni podražaj?* Struktura takvog odgovora je dobro proučena, naročito u slučaju straha. Izvor tih odgovora leži u centralnoj jezgri amygdale i može se podijeliti u najmanje četiri tipa, Damasio [**10**], LeDoux [**24**]:

- odgovori koji utječu na ponašanje
- automatski odgovori
- lučenje endokrinih žlijezda
- opće promjene u načinu procesiranja informacija u mozgu.

Razjasnimo to na primjeru. Zamislimo situaciju u kojoj smo suočeni s fizičkom agresijom. Možemo izabrati između bježanja i suočavanja s agresorom. Odgovori amygdale koji utječu na ponašanje, to su oni najvidljiviji, su popraćeni nizom fizioloških promjena koje dozvoljavaju organizmu da pojača cirkulaciju krvi i mobilizira energiju potrebnu za bijeg ili borbu. Isto tako, krvni pritisak i puls se povećavaju i pripremaju organizam za akciju. To su automatski odgovori jer ih regulira vegetativni nervni sistem. U isto vrijeme pojačava se izlučivanje adrenalina u krv, jedne vrsta hormonalne supstance, kao i mobilizacija metabolita potrebnih za proizvodnju energije. I na kraju, dešavaju se opće promjene u radu nervnog sistema u smislu optimizacije nervnog sistema za slučaj opasnosti: izoštrava se percepcija, ubrzava se brzina procesiranja, ... Neke od ovih rekcija su vidljive, a neke ostaju nezamjećene. Interesantno je da sve te promjene mogu ostati nezapažene od strane samog subjekta. U tom slučaju on/ona nije u stanju povezati te reakcije sa situacijom koja ih je uzrokovala.

Lanac događanja pokrenut odgovorom amygdale na poticaj nije još zaustavljen na način kako smo opisali. Promjene se dešavaju na tjelesnim organima i zamijećene su od strane mozga putem nervnih vlakana koji nose informacije iz periferije u centralni nervni sistem. Na primjer, ubrzano kucanje srca, crvenilo ili bljedilo lica, znojenje, ... to su organske promjene i one nisu nezamjetljive za mozak koji neprestano prima informacije o stanju cijelog organizma. Time se zatvara krug signala potaknutih emocionalnim vrednovanjem pobude i mozak otkriva što su posljedice emocionalne reakcije koju je sam pokrenuo.

Mnogi smatraju da taj feedback nije toliko bitan ali da može biti od važnosti samo u ekstremnim slučajevima; to međutim nije tako. Ovaj tok informacija od periferije ka mozgu o stanju svih dijelova organizma je stalan i bez zastoja. Veći dio vremena mi ga ne zamjećujemo, odnosno nismo ga svjesni, uzimamo ga zdravo za gotovo i doživljavamo ga kao pozadinu našeg mentalnog života. Damasio ga naziva *tjelesni krajolik*. Krajolik koji je uvijek prisutan i u stalnoj promjeni. Arterije se kontrahiraju, žlijezde izlučuju svoje izlučevine, otkucaji srca slabe ili se ubrzavaju, jednjak se grči, neki dijelovi tijela se pune krvlju dok drugi presušuju. Promjene u tom tjelesnog krajoliku posljedice su emocionalnih podražaja, a mozak možemo zamisliti kao stalnog promatrača koji ih prati i zapisuje. Ne samo da mozak registrira te promjene nego je doslovce preplavljen hormonskim izlučevinama ovisno o emocionalnim promjenama.

Opisali smo kako se formira emocionalno iskustvo, ne samo kao process vrednovanja pobude u centralnom nervnom sistemu, ne samo kroz primarne i tjelesne reakcije pomoću kojih nervni sistem odgovara na to vrednovanje nego i kroz način na koji mozak percipira te primarne i tjelesne reakcije nakon što su se desile. Za one koji vole sistematizaciju, spomenuti procesi se mogu grupirati u tri različite kategorije LeDoux [**25**]:

- vrednovanje pobude
- izražavanje emocije
- iskustvo tjelesnih promjena.

To iskustvo tjelesnih promjena je ono što Damasio naziva *osjećanja* i razlikuje ga od ostalih dijelova emocionalnog iskustva. Govoreći Damasiovim rječnikom, osjećanja su ništa drugo nego percepcija tjelesnog krajolika.

Vratimo se na trenutak na svjesnost vlastitih emocija. Pridruživanje vrijednosti određenom poticaju može se odvijati bez naše svijesti o tome. Uglavnom jesmo svjesni svojih emocija, ali u mnogim slučajevima i nismo. Dešava se čak da tjelesne reakcije na emocionalni sadržaj proteknu bez svjesnog zapažanja. To ovisi ne samo o genetskim faktorima već i o svijesti o vlastitom tijelu koju smo razvili u djetinjstvu i adolescenciji. Djeca smo civilizacije koja ne pridaje dovoljnu pažnju osluškivanju vlastitog tijela i mnogi pojedinci žive svjesni život odijeljen od tijela i tjelesnih iskustava, a u ekstremnim slučajevima postoji istinska podijeljenost između pshičkih iskustava i tjelesnih senzacija. Moguć je i sljedeći slijed događanja: afektivni karakter pobude nije svjesno registriran ali je subjekt svjestan tjelesnih reakcija, znojenja, probavnih smetnji... U tom slučaju tijelo samo govori da se nešto važno događa bez poznavanja uzroka tim promjenama i upozorava nas da sami odredimo uzrok. Ako su te tjelesne reakcije jake ili pak dugotrajne mogu se pojaviti ozbiljni poremećaji u radu pojedinih organa poznatim pod nazivom psihosomatske bolesti. Emocije koje nisu svjesne i ne nalaze pogodan izlaz na neki drugi način manifestiraju se u tijelu i, što je paradoksalno, subjekt doživljava tjelesni poremećaj kao nešto vanjsko, nešto što on/ona ne prepoznaje i uzrok je njegovih problema i patnje.

**3.4. Emocije i odlučivanje.** Najprimitivniji organizmi ne moraju donositi neke kompleksne odluke zbog jednostavnosti njihovog repertoara ponašanja. To su uglavnom genetski programirani procesi. Što je organizam razvijeniji ovim urođenim mehanizmima ponašanja pridružuje se veća sposobnost spoznavanja okoline i mogućnost interakcije s tom okolinom.

Sposobnosti koje je razvio ljudski mozak (moždana kora) posebno su zanimljive. Ona sakuplja informacije o prošlim događajima na način da prošla iskustva ostavljaju trag u mozgu koji će utjecati, ne posve odrediti, buduću odluku. Ta ista moždana kora omogućava kreiranje modela buduće stvarnosti u obliku slika. Te se slike generiraju iz zapisa o prošlom iskustvu, znanju o svijetu i načinu kako on funkcionira stečenom kroz iskustvo. Tu sposobnost imaginacije nazivamo *memorija budućnosti* jer je uglavnom bazirana na memorijskim zapisima. Područje mozga koje povezuje te više funkcije za planiranje je prednji režanj, kojeg znanstvenici u posljednje vrijeme počinju bolje razumijevati. Tijekom evolucijskog procesa sve ove složenije sposobnosti za obrađivanje informacije morale su se integrirati u već postojeće osnovne funkcije koje su ostale nepromijenjene. Imajući emocije u vidu, amygdala i ostatak limbičke strukture sačuvali su prvobitnu ulogu koju su imali i kod prvih sisavaca, a to je da pridruže podražaju emocionalnu važnost i da pokrenu odgovarajuće odgovore u skladu s tom prosudbom. Ono što amygdala danas ima na raspolaganju, služeći se kompjutorskom metaforom, je veća baza podataka koju mora konzultirati u svom procesiranju. Bez obzira na iznijansiranost i kompleksnost moždane kore kod ljudi zadatak svih tih razmatranja amygdale je ostala ista: uvažiti ili odbaciti.

Što se tiče odlučivanja u svakodnevnom životu izgleda da ključnu ulogu ima prednji režanj moždane kore. On sam ima trećinu ukupnog volumena mozga što nije slučaj kod otalih životinjskih vrsta, kod čimpanze 17%, a kod mačke samo 3%. Mnogi testovi pokazuju da je čovjek sposoban jako dobro rješavati testove inteligencije ili zadatke umjetno kreirane u laboratoriju, a da istovremeno ima velikih poteškoća u rješavanju životnih problema. Čini se da teorijsko i apstraktno razmišljanje ili rješavanje umjetno kreiranih zadataka ne garantira i dobru sposobnost socijalne adaptacije i razumno donošenje odluka u osobnom životu. Ovdje ćemo iznijeti samo neke od argumenata koji su naveli Damasia na zaključak o važnosti prednjeg režnja u odlučivanju. To je prekrasno opisano u njegovoj knjizi *Descartes' Error* [**11**].

3.4.1. *Hipoteza o tjelesnim pokazateljima.* Damasiovo objašnjenje načina donošenja odluka zasnovano je na hipotezi o tjelesnim pokazateljima (Somatic Marker Hypothesis). Na neurobiološkom nivou ti markeri proizlaze iz suradnje izmedu prednjeg režnja i primitivne strukture amygdale i ostalih limbičkih područja vezanih s njom. Strogo racionalni procesi nisu jedini odgovorni za većinu odluka koje donosimo u svakodnevnom životu jer nisu sposobni donijeti brzi i odgovarajući odgovor na postavljen problem. Čisto racionalno rješenje mnogih problema s kojima se susrećemo zahtijeva enormno mnogo vremena za razmatranje svih mogućih situacija i predlaganje rješenja kao i za računanje svih troškova i prednosti kod uspoređivanja hipotetičkih situacija. Usporedno čuvanje svih rezultata izračunavanja koje činimo za večinu naših odluka zahtijevalo bi memorijski kapacitet i vrijeme s kojima naprosto ne raspolažemo. To ipak ne znači da racionalni procesi nisu prisutni, oni su svesrdno potpomognuti drugim mehanizmima emocionalne prirode.

Što se događa kad smo suočeni s izborom jedne izmedu mnoštva alternativa? Sjetimo se samo nedavnih odluka koje smo donijeli ili koje ćemo donositi u budućnosti. Sve te odluke mogu biti vrlo vrlo različite, na primjer: izbor zaposlenja, izbor životnog partnera ili liječnika, gdje ćemo provesti godišnji odmor ili na koji način doći do stana. Naravno da u svakoj od gornjih odluka važnu ulogu imaju racionalni elementi, na primjer financijski troškovi, ali osnovni faktor u odluci predstavljaju emocije.

Na koji to način emocije utječu na odluku? Hipoteza o tjelesnim pokazateljima to objašnjava ovako: suočena s više mogućnosti izbora, prednja moždana kora koristi svoju sposobnost vizualizacije raznih scenarija kao posljedicu svake pojedine odluke. To su uglavnom slike ili fragmenti slika koji sadrže ne samo opisne elemente situacije nego služe i kao skica za izazivanje emocionalnih reakcija koje bi ta situacija izazvala u nama, a ujedno uključuju i (pred)iskustvo instinktivnih i tjelesnih reakcija vezanih uz emociju. Upravo te fizičke promjene Damasio naziva *tjelesni pokazatelji*, jer za tu zamišljenu situaciju, kandidata za realnost realnost, one generiraju izgled tjelesnog krajolika kao dio mogućeg emocionalnog iskustva. Promjena tjelesnog krajolika može biti pozitivna, ugodna, ili negativna ako probudi neprijatne senzacije. Posljedice takvog označavanja dozvoljavaju mozgu da brzo i efikasno eliminiraju akcije koje ostaju, da tako kažemo, nisko rangirane na tom emocionalnom ispitu. Za one akcije koje su označene kao pozitivne otvorena je mogućnost za ponovno preispitivanje prije konačnog izbora. Takva procedura odvija se brzinom koju nije moguće postići strogo racionalnim proračunima. Treba naglasiti da se tjelesno označavanje mogućih izbora prezentiranih putem scenarija ne odvija uvijek na svjesnom nivou, no to ga ne sprečava da se postigne efekt potreban za donošenje odluke.

Karakteristika opisanog mehanizma je da omogućava sasvim osobne procjene prezentiranih scenarija. To nisu apstraktne simulacije dobrih i loših strana mogućeg rješenja, već radije 'isprobavanje haljina' ako smijemo povući takvu paralelu, koristeći pri tome vrlo fine procjene i uvažavajući našu vlastitu osobnost i iskustvo. Pacijenti s ozljedama prednjeg režnja u stanju su rješavati probleme koji zahtijevaju apstraktnu inteligenciju vrlo dobro, ali nisu u stanju baratati sa situacijama koje zahtijevaju povezivanje s osobnom emocionalnom poviješću i njeno stavljanje u kontekst. Upravo kod osobnih odluka oni pokazuju svoju nesposobnost jer je komunikacija između prednjeg režnja i limbičke strukture prekinuta. Takvi pacijenti su prisiljeni koristiti obilje resursa koje zahtijevaju čisto racionalni mehanizmi, a oni su neprikladni za rješavanje većine teških problema u stvarnom životu.

Više i detaljnije o tome može se naći u knjizi Damasio, Descartes' Error u kojoj je detaljno razvijen ovaj univerzalni model za ljudske emocije. Damasio je odbacio Dekartovski dualizam tijelo–um koji je oštetio znanstvene pokušaje da razumiju ljudsko ponašanje i razvio novu teoriju na vlastitim neuropsihološkim eksperimentima. Njegova je pretpostavka da je ljudsko znanje skup dostupnih predstava (slika) sačuvanih u mozgu. Misao shvaća kao proces koji uređuje i rukuje tim predstavama.

Jedna od tih predstava je naše vlastito tijelo, bazirana na podacima (informacijama) dobivenih od centralnog i perifernog nervnog sistema. Emociju shvaća kao kombinaciju mentalnih vrijednostnih procesa, jednostavnih i složenih, s raspoloživim odgovorima na te procese, na primjer izraz lica. Emocije ne trebaju misaoni proces, one se automatski odvijaju. To su osnovni mehanizmi potrebni za održavanje života.

Damasio razlikuje emociju od osjećaja (eng. feeling). Osjećaj je mentalna predodžba (percepcija) stanja tijela. Osjećaj je prepoznavanje da se nešto dešava, dok je emocija vizuelni efekt tog događaja. Emocije su tjelesnog, a osjećaji su mentalnog karaktera. Emocije prethode osjećajima i mogu se smatrati njihovim pokretačima. Osjećaj možemo shvaćati i kao trajnu memoriju emocija. To znači da osjećaji pomažu održavanju životu na 'dugu stazu'.

Neurološki mehanizmi emocija i osjećaja kod ljudi su evoluirali i razvili situacijama prilagođena ponašanja koja ne zahtjevaju svjesno razmišljanje. Dalmasio tvrdi da vremenski zahtjevni procesi racionalnog razmišljanja često umanjuju šansu za preživljavanje u situaciji kad je potrebna trenutačna odluka upravo zbog ranije spomenute zahtjevnosti za memorijske kapacitete i vremenski su spori.

**3.5. Rizik.** Iako je odlučivanje pod rizikom centralna tema u teoriji odlučivanja, modeli odlučivanja pod rizikom su uglavnom ignorirali važnost emocija. Dok su neki teoretičari proučavali utjecaj emocija doživljenih nakon odluke, vrlo malo pažnje je posvećeno utjecaju emocija proživljenih za vrijeme procesa donošenja odluke. Ljudi dvojako reagiraju na rizik: procjenjuju ga racionalno i reagiraju na njega emocionalno. Iako međusobno isprepletene; kognitivna procjena uzrokuje emocije i emocije utječu na procjenu, te reakcije imaju različite 'determinants'. Kognitivne procjene rizika su osjetljive na vrijednosti varijabli u odlučivanju, na vjerojatnosti i na poželjnost (atraktivnost) alternativa. Emocije mogu biti i jesu posljedice kognitivnih procjena ali se isto tako pojavljuju bez ili uz minimalno svjesno procesiranje informacija. Na primjer, ljudi proživljavaju strahove i bez poznavanja uzroka tim strahovima. Za razliku od kognitivnih procjena emocionalne reakcije su osjetljive na jasnoću pridruženih im predstava, bliskost u vremenu i na mnoge druge varijable koje igraju posvezanemarivu ulogu u kognitivnim procjenama. Posljedica spomenutih razlika je da ljudi doživljavaju neslaganje između proživljavljenog straha uvjetovanog određenom rizičnom situacijom i kognitivnom procjenom prijetnje uzrokovane tim rizikom.

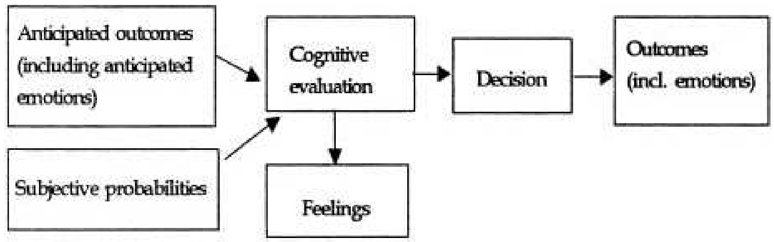
Loewenstein [**27**] razlikuje dvije vrste emocija: *očekivane* (eng. anticipated) i *predodređene* (eng. anticipatory). Očekivane emocije su sastavni dio očekivane posljedice odluke. To su emocije koje očekujemo da će nas preplaviti nakon proživljavanja posljedice odluke. To nisu emocije koje su doživljene u trenutku donošenja odluke. Možemo ih shvaćati kao implicitne emocije vezane uz moguću posljedicu odluke. Predodređene emocije su trenutačne 'visceralne' reakcije (strah, nemir, strava) na rizičnu ili nedefiniranu situaciju.

Dok su se znanstvenici iz područja odlučivanja fokusirali uglavnom na proučavanje tih implicitnih emocija, znanstvenici izvan tog područja, na primjer iz socijalne psihologija i neuroznanosti, počeli su izučavati ulogu predodređenih emocija kod donošenja odluke. Dugo se smatralo da emocije i strasti imaju razarajući utjecaj na donošenje odluke. Tek u posljednje vrijeme ističe se važnost emocije kao informatičkog inputa u odluci i opisuju se posljedice odluka kod kojih su emocije blokirane. Na primjer, *Somatic Marker Hypothesis* tvrdi da je normalno donošenje odluke vođeno tjelesnim reakcijama na relativnu poželjnost alternativa. Kao potvrdu takvoj tvrdnji Bechara i dr. [**4**] i Damasio [**11**] pokazuju da neke neurološke abnormalnosti blokiraju takve tjelesne reakcije što značajno oslabljuje donošenje odluke u riskantnoj situaciji. Istraživanja Wilson i dr. [**43**] te Wilson i Schooler [**44**] dokazuju da kvaliteta odluke pada kada se smanjuje afektivi udio u njenom donošenju i kad je donosilac odluke prisiljen sistematski uvažavati sve *za* i sve *protiv*. Razlog tome je što su affektivne reakcije na podražaj brže nego kognitivne evaluacije, vidi LeDoux [**23**] i Bargh [**2**]. Takvi trenutačni odgovori osiguravaju životinjama i ljudima brzo i sirovo analiziranje mogućih reakcija na prijetnju ili podražaj i omogućava gotovo trenutnu reakciju.

Na području kliničke, socijalne i kognitivne psihologije došlo se do spoznaje o dva kvalitativno različita načina procesiranja informacija. Sloman [**35**] na primjer, razlikuje asocijativno procesiranje informacija kod donošenja odluke od onog koje je podvrgnuto pravilima. Pravilima podvrgnuto procesiranje poštuje formalna pravila logike i dokaza i odvija se na svjesnoj razini. Asocijativno procesiranje je spontanije i zasnovano je na principu sličnosti i vremenskoj bliskosti i što je sličnost između dva koncepta veća to smo skloniji prenositi obrasce zaključivanja iz jednog u drugi. Kako asocijativno procesiranje nije rukovođeno svjesnim procjenama to je vrlo teško spriječiti njegov utjecaj na rasuđivanje i odlučivanje. Sloman pronalazi primjere rasuđivanja i kategoritacije iz svakodnevnog života u kojima ljudi dolaze do konfliktnih odgovora procesirajući informacije na oba spomenuta načina. Mnogi primjeri pokazuju da asocijativno procesiranje kontekstualnih informacija utječe na prosudbu subjektivne vjerojatnosti čak i u situacijama kad su numeričke procjene tih vjerojatnosti egzaktno izračunljive.

Loewenstein [**27**] integrira ove dvije potke shvaćanja emocija, jednu koja pokazuje da emocije odluku hrane podacima i drugu koja pokazuje da emocionalni odgovori na riskantnu situaciju pokazuju značajnu razliku od kognitivne evaluacije u teorijski koncept *risk-as-feeling* hipotezu, kako ju je sam nazvao. Emocionalne reakcije i kognitivne evaluacije uglavnom su usklađene i kao takve moduliraju zaključivanje i donošenje odluke. Međutim, predodređene emocionalne reakcije katkada odudaraju od kognitivnih evaluacija i, kada se se to desi, onda pokazuju dominantan utjecaj na ponašanje. Risk-as-feeling hipoteza pokušava objasniti kako i kada takve emocionalne razlike odudaraju od kognitivne procjene rizika i objašnjava kako te reakcije utječu na ponašanje.

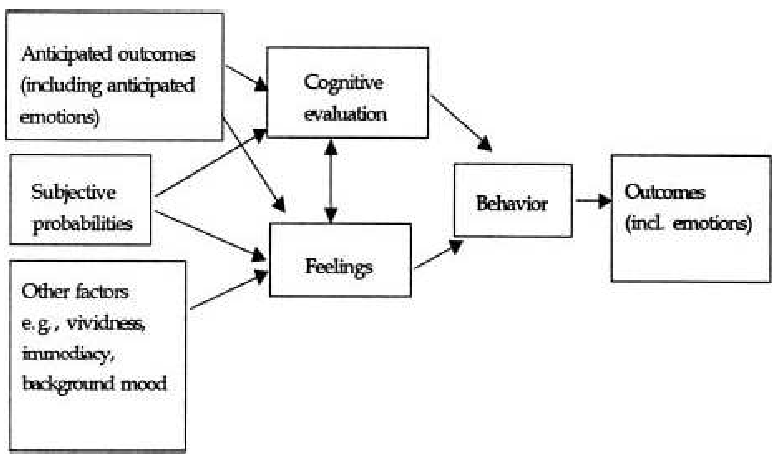
Klasičan pristup utjecaju emocija na odlučivanje pretpostavlja da su ljudi sposobni procijeniti žestinu i vjerojatnost moguće posljedice izbora




SLIKA 3. Klasičan model odluke.

i integrirati tu informaciju preko neke vrste računa baziranog na očekivanoj koristi u konačnu odluku. Oslobođene emocije u trenutku donošenja odluke nisu integrirane u sam proces. U tom smislu teoretičari (klasičari) odlučivanja pretpostavljaju, implicitno ili eksplicitno, da je donošenje odluke u svakodnevnoj pa i u riskantnoj situaciji svjesna aktivnost.

Na slici 3 prikazana je shema klasičnog pristupa upotpunjenog s očekivanim emocijama kao nadopunom očekivanih situacija. Donoslilac odluke kod uspoređivanja mogućih ishoda promatra i očekivane emocije vezane uz te usporedbe i koristi ih u procjeni preferencija tih ishoda. U risk-as-




SLIKA 4. Risk-as-feelings model odluke.

feeling modelu, slika 4, pretpostavlja se da je odgovor na riskantnu situaciju, uključujući i odlučivanje, djelomično i rezultat direktnog emocionalnog utjecaja koji ne ide preko prednjeg režnja a uključuje i osjećanja kao što su briga, strah, strava ili tjeskoba.

Risk-as-feelings hipoteza pretpostavlja da ljudi procjenjuju rizične alternative na svjesnom nivou, kao u tradicionalnom modelu, na temelju vjerojatnosti i poželjnosti pridruženih im posljedica. Takve kognitivne procjene imaju afektivne posljedice, emocionalna stanja, koje opet povratno utječu na te procjene. Istodobno, ta emocionalna stanja usko su povezana s faktorima, kao neposrednost rizika na primjer, koji ne utječu na kognitivnu procjenu rizika a također su 'obojana' vjerojatnostima i izlaznim vrijednostima na način koji se razlikuje od onog na koji te varijable ulaze u kognitivnu evaluaciju. Kao što je prikazano na slici 4 ponašanje je određeno međuigrom ovih, često puta konfliktnih, stanja u rizičnoj situaciji. Primijetimo da je termin 'odluka' na slici 3 zamijenjen terminom 'ponašanje' na slici 4. Ta zamjena termina posljedica je opažanja da većina emocionalno pokrenutih i s rizikom povezanih ponašanja ne odgovara terminu odluka u smislu u kojem se termin odluka inače koristi.

**3.6. Emocije i umjetna inteligencija.** Istraživanja na području umjetne inteligencije daju važnost emocijama, ili emociji sličnim stanjima, kao osnovu za proširenje autonomije inteligentnih sistema. Inteligentni sistemi u svom zaključivanju uzimaju informaciju kao gotovu činjenicu, bilo djelomično, unutar neke vjerojatnostne strukture, bilo potpuno ako je njihovo zaključivanje zasnovano na formalnoj logici, i koriste je kao osnovu za daljnje razmišljanje. To razmišljanje može dovesti do 'viših uvjerenja' i omogućava izbor ciljeva, planova i ponašanja. Najčešće se to svodi na izbor jednog od alternativnih odgovora koji su ugrađeni u sistem ili ih je sistem prihvatio u procesu učenja. Izbor je baziran na raspoloživim informacijama koristeći ugrađenu mjere sličnosti među njima ili na a priori zadanom rangiranju alternativnih ponašanja.

Inteligencija sistema proizlazi iz njegove interakcije s korisnikom, posebno u situacijama kad su sistemski ciljevi i namjere u konfliktu. Takva interakcija također je jedan od sistemskih ciljeva, bilo eksplicitan ili implicitan i može biti neispunjena ako sistem nije u stanju izvesti odgovarajuće postupke, za što mu je opet potrebna određena autonomija. Kakvu ulogu u svemu tome imaju emocije?

Inkompatibilni ciljevi, nedovoljna uvježbanost ili nedostatak sredstava za pokretanje akcije glavni su uzroci nestabilnosti ne samo kod inteligentnih sistema već i kod ljudi. U takvoj situaciji povećava se rizik od pogrešne odluke jer sistem nije u stanju nositi se s takvom situacijom. Jedna mogućnost za povećanje autonomije sistema je ugraditi računarski anlogon emocije u samu srž sistema. To povećava stupanj autonomije sistema jer mu daje mogućnost vrednovanja ciljeva i sredstvo za izbor akcije i reguliranje vlastitog ponašanja. Ta emocijalna jezgra mu također omogućava da prepozna prolazna, sporedna kao i postojana, trajna stanja. Arhitektura računarske tehnologije ide u takve specifičnosti da definira primarne, sekundarne i tercijarne emocije, v. Sloman [**34**] i Davis [**12**], za tehničku realizaciju takvih sistema.

**3.7. Motivacija, učenje.** napisati

POGLAVLJE 3

# Hijerarhijsko odlučivanje

> Ciljevi i vrijednosti su pojmovi u kojima mentalno zahvaćamo naše iskustvo. To su ireducibilni pojmovi i koncepti višeg nivoa se definiraju pomoću njih.
>
> S. Pinker (psiholog)

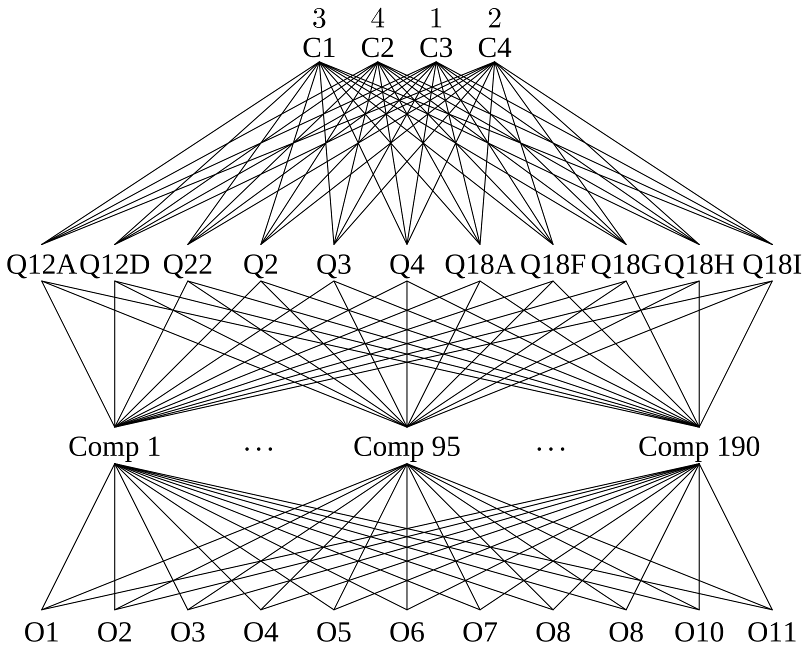
## 1. Hijerarhijska struktura odluke

***Hijerarhijska struktura***, kraće ***hijerarhija***, je matematički model ciljnog razmišljanja. Svi elementi odlučivanja grupiraju se u nivoe koji su linearno uređeni. U najvišem nivou nalaze se ***ciljevi***, jedan ili više njih, zatim podciljevi, ***kriteriji***, podkriteriji... i na dnu hijerarhije su razni scenariji (opcije) ili ***alternative*** koje želimo rangirati. Elemente odlučivanja koji imaju zajednički kriterij nazivamo još i njegovim ***listovima djecom*** a kriterij je njihov ***korijen*** ili ***roditelj***. Primjeri kriterija u praksi su:

- u sportu: opći dojam, složenost vježbe, preciznost, originalnost (vježbača);
- kod izbora zaposlenika: kvalificiranost, znanje (stranog jezika, ...), radni staž;
- kod kupnje kuće: udaljenost od tramvajske stanice, cijena, starost kuće, mogućnost dobivanja kredita.

U pravilu se konkretniji elementi odlučivanja nalaze pri dnu hijerarhije, dok se općenitiji i neodređeniji nalaze pri vrhu. Širina utjecaja jednog nivoa je samo do njenog susjeda, tj. nivoa ispod[1]. Elementi iz istog nivoa nemaju utjecaja jedni na druge.

[1] To nije baš sasvim točno. Moguće je da neki elementi odlučivanja imaju kriterije iz raznih nivoa ali je važno da su sva djeca iz istog nivoa.




SLIKA 1. Hijerarhijska struktura

Ima puno argumenata za takav način provođenja odluke u praksi i u organizaciji društva, životnih struktura, vojske. U svakodnevnom životu brojanje novčanica, na primjer, organiziramo tako da ih podijelimo u grupe po vrstama novčanica i izbrojimo novčanice u svakoj grupi. U slučaju greške lakše je ponovno brojati novčanice u jednoj grupi nego ponavljati cijeli postupak od početka. U ciljeve i kriterije često stavljamo i ***atribute*** tako da se hijerarhija koristi i u višeatributnom odlučivanju. Hijerarhija je *strukturno* i *funkcionalno* stabilna. Strukturno, jer omogućava dodavanje i oduzimanje pojedinih elemenata a da se ne naruši cijela organizacija, a funkcionalno jer omogućava protok iformacija odozgo prema dolje.

Na slici 1 imamo četiri nivoa i četiri cilja u prvom nivou. Ti ciljevi nisu svi jednako važni i njihova relativna važnost je 3, 4, 1, 2 respektivno.

Postavlja se pitanje kako se određuju elementi odlučivanja i kako se organizira hijerarhija. To je na granici umjetnosti i znanosti. Jedno je interesantno, iskustvo pokazuje da bez obzira na hijerarhiju, rangiranje nije tako osjetljivo kako se čini na prvi pogled ali ono što je važnije od hijerarhije je (in)konzistentnost. O inkonzistentnosti ulaznih podataka će kasnije biti govora i ako se ona pokaže velika onda treba redefinirati hijerarhiju. Više o hijerarhijskim modelima i aksiomatskom pristupu hijerarhijskoj strukturi može se naći u Saaty [**32**].

Posebnu ulogu u hijerarhijskoj odluci ima vrhunski kriterij ili ***cilj***. U lingvističkom smislu cilj je nešto što želimo postići, nešto čemu težimo. Sredstva za ostvarenje cilja, alternative, stoje nam na raspolaganju ali nisu sva jednako efikasna. Neka sredstva su ograničena, recimo u vremenu, druga nisu pouzdana, treća su na raspolaganju uz određene ustupke. Ona se razlikuju i ono po čemu se razlikuju nazivamo zajedničkim imenom ***kriterij(i)*** ili ***atributi***. Ono što procesom odlučivanja želimo postići je analizirati sposobnost, potencijal svakog mogućeg sredstva koje nas vodi ka cilju i rangirati ih prema tim sposobnostima. Takav način razmišljanja u psihologiji se naziva ***ciljnim razmišljanjem*** i jedna od funkcija uma je upravo takvo razmišljanje u svakodnevnom zadovoljavanju naših potreba. Pri tome alternative mogu biti i sekundarni ciljevi, a jednako tako i argumenti kojima uvjeravamo sebe i ostale u njihovu važnost. Zbog svega rečenog ***cilj*** je u hijerrahijskom odlučivanju uvijek prisutan i u njega donosilac odluke implicitno ugrađuje svoje iskustvo, pa čak i zadovoljstvo vlastitim životom. Alternativni naziv za cilj je ***kontekst odluke*** kojeg je u pojedinim situacijama lakše odrediti, ali ne nosi u sebi smisao stremljenja koji ima termin cilj.

**1.1. Procedura donošenja odluke u hijerarhiji.** Procedura odlučivanja u hijerarhiji je sljedeća: Težina ciljeva u prvom nivou mora biti zadana. Ako je cilj samo jedan onda mu pridjelimo težinu 1. Donosilac odluke rangira elemente po nekoj metodi u nivou ispod i ponavlja proces dok posljednji nivo ne bude rangiran. Najvažnija procedura u rangiranju nivoa je konsenzus koji se provodi za sve kriterije tog nivoa. Opisati ćemo dvije metode za rangiranje, Saatyjevu ***metodu svojstvenog vektora*** [**32**] i ***metodu potencijala*** [**37**]. Konstrukcija konsenzusa u principu je neovisna o metodi iako metoda sugerira i konsenzus.

U grupnoj odluci svaki član grupe definira svoju hijerarhiju napravi se konsensus na nivou alternativa. To ima smisla naročito ako se donosioci odluke ne slažu oko izbora kriterija. Jedan drugi razlog koji govori u prilog takvog modela grupnog odlučivanja je mogućnost mjerenja 'udaljenosti' među odlukama članova grupe, v. Čaklović [**?**] i diskusiju u poglavlju **??**. Ako se pokaže da članovi grupe imaju usklađena mišljenja što se tiče rangiranja alternativa, onda nema potrebe inzistirati na usaglašavanju stavova oko izbora kriterija.

## 2. Metoda svojstvenog vektora

**2.1. Konzistentnost.** Rezultate uspoređivanja po parovima možemo organizirati u matricu. Ako je u igri $n$ alternativa onda možemo učiniti najviše $n^2$ usporedbi. Rezultat usporedbe $i$-te alternative s $j$-tom izražavamo pozitivnim brojem $a(i, j)$ koji iskazuje preferenciju jedne od alternativa.

Tako na primjer, ako je $a(i,j) = 5$ to znači da je $i$-ta alternativa 5 puta važnija za donosioca odluke od $j$-te na mjernoj skali u njegovoj mentalnoj slici. Prirodno je pretpostaviti da je $a(i,i) = 1, \forall i = 1,\ldots,n$. Nadalje, da bi se smanjio broj usporedbi pretpostavljamo da je

$$a(i,j) = a(j,i)^{-1} \quad \text{– recipročnost}$$

jer je u tom slučaju dovoljno učiniti $\binom{n}{2} - n$ usporedbi. Matricu $A = a(i,j), i = 1,\ldots,n$ s takvim svojstvom nazivamo ***recipročna*** matrica.

DEFINICIJA 2.1. Reći ćemo da je matrica $A$ konzistentna ako je

$$a(i,j)a(j,k) = a(i,k) \quad \text{za svako } i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{2.1}$$

Konzistentnost izražava dosljednost i preciznost donosioca odluke u uspoređivanju. Broj $a(i,j)$ izražava "težinu" alternative $i$ mjerenu na skali, nazovimo je $j$-ta skala, u kojoj je "težina" alternative $j$ jednaka 1. U takvoj interpretaciji je $a(j,j) = 1$ prirodan zahtjev. Zahtjev (2.1) je zahtjev na proporcionalnost $k$-te i $j$-te skale i faktor proporcionalnosti iznosi upravo $a(j,k)$.

TEOREM 2.2. *Pozitivna matrica $A$ je konzistentna ako i samo ako postoje pozitivni brojevi $w_i > 0, i = 1,\ldots,n$ tako da vrijedi*

$$a(i,j) = \frac{w_i}{w_j}. \tag{2.2}$$

DOKAZ. Jednakost (2.2) evidentno povlači (2.1). Obratno, neka vrijedi (2.1). Definirajmo

$$w_i = \frac{a(i,j)}{a(s,j)}, \quad \text{za fiksno } s.$$

Tada je

$$a(i,j) = \frac{a(i,k)}{a(j,k)} = \frac{a(i,k)}{a(s,k)} \cdot \frac{a(s,k)}{a(j,k)} = \frac{w_i}{w_j}.$$

□

Svaka konzistentna matrica $W$ je produkt jednostupčane matrice

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

i jednoretčane matrice

$$\frac{1}{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & \frac{1}{w_2} & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix},$$

tj.

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & \frac{1}{w_2} & \dots & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix}.$$

Očito je da su svi stupci od $W$ proporcionalni pa je rang matrice jednak 1. Odavde slijedi:

(1) Nula je svojstvena vrijednost od $W$ kratnosti $n-1$,
(2) a provjerom se vidi da je $w$ je jedinistveni (do na faktor) svojstveni vektor od $W$ kratnosti 1 sa svojstvenom vrijednošću $n$.

TEOREM 2.3. *Pozitivna recipročna matrica $A$ je konzistentna ako i samo ako je njena maksimalna, po modulu, svojstvena vrijednost $\lambda_{max} = n$.*

DOKAZ. Neka je $A$ pozitivna recipročna matrica i $\lambda_{\max}$ maksimalna, po modulu, svojstvena vrijednost od $A$ i $w$ svojstveni vektor. Tada je

$$Aw = \lambda_{\max} w$$
$$\sum_j a_{ij} w_j = \lambda_{\max} w_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ako gornju jednakost skalarno pomnožimo s $\frac{1}{w_i}$ i zbrojimo, dobivamo

$$\begin{aligned} n\lambda_{\max} &= \sum_i \sum_j a_{ij} w_j {w_i}^{-1} \\ &= \sum_{i \neq j} a_{ij} w_j {w_i}^{-1} + \sum_i a_{ii}. \\ n\lambda_{\max} - n &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} w_j {w_i}^{-1} + a_{ij}^{-1} w_i {w_j}^{-1}). \end{aligned}$$

Zagrada na desnoj strani u gornjem izrazu je oblika $x + \frac{1}{x} > 0$ i poprima jednistveni minimum za $x = 1$. Dakle,

$$n\lambda_{\max} - n \geq 2 \cdot \binom{n}{2} = n^2 - n. \tag{2.3}$$

Ako je $A$ konzistentna tj. vrijedi (2.1) onda je $A = W$ i $\lambda_{\max} = n$. Obratno, ako vrijedi $\lambda_{\max} = n$ tada u gornjoj nejednakosti stoji jednakost i svaki sumand poprima svoju majmanju vrijednost tj.

$$a_{ij} w_j {w_i}^{-1} = 1 \quad za \quad i, j = 1, \dots, n,$$

što smo i htjeli dokazati. □

**2.2. Mjera inkonzistentnosti.** Prirodno se nameće ideja da se svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti $\lambda_{\text{max}}$ matrice $A$ uzme kao vektor rangova za elemente odlučivanja na svakom nivou hijerarhije. Još samo ostaje pitanje kako izračunati taj vektor.

Iz formule 2.3 vidimo da je $\lambda_{\text{max}} \geq n$ za svaku recipročnu matricu i $\lambda_{\text{max}} = n$ ako i samo ako je matrica konzistentna. Prema tome razliku $\lambda_{\text{max}} - n$ možemo uzeti kao mjeru odstupanja recipročne matrice od konzistentnosti. Što je taj broj manji to su mjerenja dobivena uspoređivanjem po parovima preciznija. Iz nekih razloga kao mjera se uzima *indeks konzistentnosti*

$$CI := \frac{\lambda_{\text{max}} - n}{n - 1}.$$

S korisničke strane bilo bi zgodno imati neku gornju granicu dopustive inkonzistentnosti ulaznih podataka. Jedan od načina je da se generiranjem slučajnih AHP matrica (dimenzije $n$) generira distribucija od $CI$ i izračuna očekivanje $MCI$ te distribucije. Zatim se računa

$$CR(n) = \frac{CI}{MCI}$$

i ako je $CR < 0.1$ ulazni podaci se smatraju konzistentnima. U tablici 2.1 izračunate su srednje vrijednosti slučajne varijable $RCI$ u ovisnosti o redu matrice $A$.

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MCI | 0 | 0 | 0.58 | 0.9 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 | 1.49 |

TABLICA 2.1. Srednja vrijednost od $CI$.

**2.3. Perronov teorem.**

TEOREM 2.4 (Perron[2], 1907). *Neka je $A$ pozitivna matrica.*

- *Tada $A$ ima prostu pozitivnu svojstvenu vrijednost $\lambda_{max}$ koja je veća po modulu od svih ostalih svojstvenih vrijednosti od $A$.*
- *Pripadni svojstveni vektor ima pozitivne komponente i jedinstven je do na množenje pozitivnim brojem.*
- *$\lambda_{max}$ ima min-max karakterizaciju*

$$\lambda_{max} = \max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \tag{2.4}$$

$$= \min_{x \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}. \tag{2.5}$$

[2]Oskar Perron, 1880 – 1975, njemački matematičar.

Svojstveni vektor $w$ iz Perronovog teorema nazivamo ***Perronovim vektorom*** a pripadnu svojstvenu vrijednost ***Perronovim korijenom***. Za dokaz teorema potrebno je uvesti nekoliko oznaka i pojmova i dokazati niz pomoćnih tvrdnji. Za početak promatrajmo parcijalnu relaciju uređaja na $\mathbb{R}^n$ definiranu s

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

Skup svih nenegativnih vektora je konus $\mathbb{R}^n_+$. Nadalje,

$$0 < x \iff 0 < x_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ako je $A$ nenegativna matrica tada je očito

$$0 \leq x \implies 0 \leq Ax$$

što znači da je nenegativan konus invarijantan na operator množenja matricom $A$ kojeg ćemo, jednostavnosti radi, označiti istim slovom $A$. Posljedica gornje nejednakosti jest da $A$ čuva uređaj tj.

$$x \leq y \implies Ax \leq Ay.$$

Neka je sada $a \in \mathbb{R}^n, 0 < a$ pozitivan vektor i

$$B_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -a < x < a\}$$

interval određen vektorom $a$. $B_a$ je otvoren konveksan skup i pripadni funkcional Minkowskog[3]

$$||x||_a = \inf\{t > 0 \mid x \in tB_a\}$$

je norma na $\mathbb{R}^n$. Specijalno, ako je $a$ vektor čije su sve komponente jednake 1, onda je to max-norma. Nije teško vidjeti da je $||a||_a = 1$ i da je pripadna operatorska norma od $A$ definirana s

$$||A||_a = \sup_{||x||_a \leq 1} ||Ax||_a$$

jednaka $||A||_a = ||Aa||_a$.

LEMA 2.5. *Neka je $A > 0$ matrica s pozitvnim elementima i $0 \leq w$ svojstveni vektor od $A$. Tada je $0 < w$ (strogo pozitivan) i pripadna svojstvena vrijednost je pozitivna.*

DOKAZ. Zbog netrivijalnosti $w$ je $0 < Aw = \lambda w$ odakle slijedi tvrdnja. $\square$

LEMA 2.6. *Neka je $0 < w$ svojstven vektor od $A$.*

i) *(maksimalnost) Ako je $\lambda > 0$ pripadna svojstvena vrijednost. Tada je $\lambda$ jednaka spektralnom radijusu od $A$ tj.*

$$\lambda = \rho(A).$$

[3]U literaturi se još naziva i baždarnom funkcijom (eng. *gauge*).

ii) *(jedinstvenost)* $w$ *je jedinstven do na množenje pozitivnim brojem.*

DOKAZ. i) $||\cdot||_w$ jer norma jer je $0 < w$. Sada je

$$||A||_w = ||Aw||_w = \lambda ||w||_w = \lambda,$$

odnosno $\lambda = \rho(A)$ jer je $\rho(A) \leq ||A||$ za svaku normu $||\cdot||$.

ii) Pretpostavimo da je $u$ svojstveni vektor za istu svojstvenu vrijednost $\lambda$ i da je $\forall \alpha > 0, u \neq \alpha w$. Promatrajmo $z_t = tu + (1-t)w$. Tada postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $0 \leq z_t$ netrivijalan i da mu je bar jedna komponenta jednaka nuli (leži na rubu konsa $\mathbb{R}^n_+$). Kako je

$$Az_t = \lambda z_t$$

također nenegativan svojstveni vektor to je $0 < z_t$ što je u suprotnosti s izborom od $t$. Dakle, $u = \alpha w$ za neki $\alpha > 0$ što dokazuje jedinstvenost svojstvenog vektora. □

LEMA 2.7 (Egzistencija pozitivnog svojstvenog vektora). *Matrica* $A$ *posjeduje svojstveni vektor čije su sve komponente veće od nule.*

DOKAZ. Za svaki nenegativan vektor $x \geq 0$ postoji broj $\lambda > 0$ tako da je

$$Ax \geq \lambda x. \tag{2.6}$$

Jedan takav $\lambda$ je

$$\lambda(x) := \min_i \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Zbog kompaktnosti jedinične sfere postoji jedinični vektor $w > 0$ na kojem se postiže maksimum s desne strane u (2.6) tj.

$$\lambda(w) = \max_{x \geq 0} \min_i \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Očito je $\lambda(w) > 0$ i $w$ je svojstven vektor od $A$ za svojstvenu vrijednost $\lambda(w)$. U suprotnom je $Aw > \lambda(w)w$ pa za $y = Aw$ vrijedi $Ay > \lambda(w)y$ odnosno $\lambda(y) > \lambda(w)$ što je u suprotnosti s konstrukcijom od $\lambda(w)$.

Istim razmišljanjem zaključujemo da postoji $\mu > 0$ tako da je

$$\mu x \geq Ax. \tag{2.7}$$

Jedan takav $\mu$ je

$$\mu(x) := \max_i \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Zbog kompaktnosti jedinične sfere postoji jedinični vektor $u > 0$ na kojem se postiže maksimum s desne strane u (2.7) tj.

$$\mu(u) = \min_{x \geq 0} \max_i \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

i da je $\mu(u)$ svojstvena vrijednost od $A$ i $u$ pripadni svojstveni vektor. Zbog jedinstvenosti, lema (2.6), je $\mu(u) = \lambda(w)$ i $u = w$ do na množenje pozitivnim brojem. $\square$

**2.4. Računanje Perronovog korijena u praksi.** U daljnjem tekstu vektor čije su sve komponente jednake 1 označiti ćemo s $e$. Pozitivnu matricu $S$ u kojoj je suma komponenata svakog retka jednaka 1 nazivamo *stohastičkom po recima*. Očito je $Se = e$. Matricu $T$ u kojoj je suma komponenata svakog stupca jednaka 1 nazivamo *stohastičkom po stupcima*. Očito je $e^\tau T = e^\tau$. Nadalje, standardnim simpleksom u $\mathbb{R}^n$ nazivamo skup $\Sigma := \{\xi \mid \xi > 0, \sum_{i=1}^n \xi_i = 1\}$.

Nekoliko sljedećih teorema odnose se na stohastičke matrice i uvod su u glavni teorem ovog odjeljka, teorem 2.10, koji će nam omogućiti računanje svojstvenog vektora od $A$ pomoću formule (2.10) i posljedice 2.12.

LEMA 2.8. *Neka je $T$ stohastička matrica po stupcima.*

i) *Tada postoji jedinstveni $v \in \Sigma$ takav da je $Tv = v$.*
ii) *Ako je $\mu \in \sigma(T), \mu \neq 1$ tada je $|\mu| < 1$.*
iii) $\forall x \in \Sigma$

$$\lim_{n\to+\infty} T^n x = v.$$

DOKAZ. i) Prema Perronovom teoremu postoji $v > 0$ i $\lambda > 0$ tako da je $Tv = \lambda v$. Slobodno možemo pretpostaviti da je $\sum_{i=1}^n v_i = 1$. Tada je produkt $Tv \in \Sigma$, jer je $Tv$ konveksna kombinacija stupaca od $T$, odakle slijedi $\lambda = 1$. Jedinstvenost od $v$ je posljedica leme 2.6.

ii) Potprostor $Y := e^\perp$ svih vektora koji su okomiti na $e$ je invarijantan na $T$. Dovoljno je dokazati da je svaka svojstvena vrijednost od restrikcije $T|_Y$ manja, po apsolutnoj vrijednosti, od 1.

Ako postoji $y \in Y, Ty = y$ onda postoji $\alpha > 0$ tako da je vektor $\xi := v + \alpha y \in \Sigma$. No tada je $T\xi = \xi$ što se protivi jedinstvenosti pozitivnog svojstvenog vektora. Isto tako, ako postoji kompleksna svojstvena vrijednost $\mu \in \sigma(T|_Y)$ i $|\mu| = 1$, tada je restrikcija od $T$ na odgovarajući dvodimenzionarni korijeni potprostor $Y_\mu$ rotacija pa postoji $y \in Y_\mu$ tako da je $\xi := v + \alpha y$ u unutrašnjosti od $\Sigma$ a $T\xi = v + \alpha Ty$ na rubu od $\Sigma$. Zbog stroge pozitivnosti matričnih elemenata od $T$ slika $T(\Sigma)$ je u (relativnoj) unutrašnjosti od $\Sigma$ što vodi na kontradikciju. Dakle, $|\mu| < 1$.

iii) Dati ćemo dva dokaza ove tvrdnje. Jedan koristi činjenicu da je spektralni radijus infimum shih operatorskih normi matrice a drugi je elementarniji i koristi samo Jordanovu formu matrice.

*Prvi dokaz:* Za $x, y \in \Sigma$ je razlika $x - y$ element prostora $Y := e^\perp$ koji je invarijantan na $T$. Zaista, $\xi \in Y \implies e^\tau T\xi = 0$ jer je $e^\tau T = e^\tau$.

Nadalje, restrikcija $T|_Y : Y \to Y$ je kontrakcija u nekoj normi jer je, prema prethodnom, spektralni radijus $\rho(T|_Y) < 1$.

*Drugi dokaz:* Označimo $Y := e^{\perp}$. $Y$ je invarijantan potprostor za $T$. Pretpostavimo, za početak, da je $T|_Y = \mu I + J$ (kompleksna) Jordanova forma preslikavanja i $|\mu < 1|$. Tada je za $m > n$,

$$S^m \xi = (\mu I + J)^m \xi = \mu^m \left( I + \frac{J}{\mu} \right)^n \xi$$

gdje je $n$ red matrice. Sada je očito $S^m \xi \to 0$ za $m \to +\infty$. U slučaju da restrikcija $S|_Y$ ima više od jedne svojstvene vrijednosti Jordanova forma je direktna suma od konačno blokova gornjeg tipa pa vrijedi isti zaključak.

□

LEMA 2.9. *Neka je $S$ stohastička matrica po recima. Tada postoji $v \in \Sigma$ takav da je*

i) $v^\tau S = v^\tau$,
ii) $\lim_{n \to +\infty} S^n = e v^\tau$.

DOKAZ. Tardnja i) je posljedica teorema (2.8) jer je $S^\tau$ stohastička po stupcima. Za dokaz ii) odaberimo $\xi \in \Sigma$ i primijenimo teorem (2.8) ii). Tada je

$$\lim_{n \to +\infty} \xi^\tau S^n = v^\tau,$$

odnosno

$$\lim_{n \to +\infty} S^n = \lim_{n \to +\infty} e\, \xi^\tau S^n = e v^\tau.$$

□

Uvedimo još pojam *lijevog svojstvenog vektora* od $A$. To je vektor $y \neq 0$ koji zadovoljava

$$y^\tau A = \mu y^\tau$$

za neku $\mu \neq 0$ dok *desni svojstveni vektor* $x$ od $A$ zadovoljava

$$Ax = \mu x$$

za neku $\mu \neq 0$. Ako je $\mu = \rho(A)$ onda se lijevi i desni svojstveni vektori nazivaju *glavnim lijevim* i *glavnim desnim* svojstvenim vektorom.

LEMA 2.10. *Neka je $A > 0$ i $\lambda$ Perronov korijen od $A$. Tada je*

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \frac{A}{\lambda} \right)^n = w v^\tau \tag{2.8}$$

*gdje je $w$ glavni desni svojstveni vektor od $A$ i $v$ glavni lijevi svojstveni vektor od $A$ koji zadovoljavaju $v^\tau w = 1$.*

DOKAZ. Neka je $Aw = \lambda w$. Označimo $D := \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n)$ matrica s komponentama vektora $w$ na dijagonali. Tada je $w = De$ i

$$D^{-1}\left(\frac{A}{\lambda}\right)De = e.$$

Gornja jednakost kazuje da je matrica $S := D^{-1}\left(\frac{A}{\lambda}\right)D$ stohastička po recima pa prema teoremu 2.9 i) postoji $\xi \in \Sigma$ takav da je

$$\xi^\tau S = \xi^\tau \text{ i } \lim_{n\to+\infty} S^n = e\xi^\tau. \tag{2.9}$$

Sada je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(D^{-1}\left(\frac{A}{\lambda}\right)D\right)^n = e\,\xi^\tau,$$
$$\lim_{n\to+\infty} D^{-1}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n D = e\,\xi^\tau,$$

odnosno

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = De\xi^\tau D^{-1} = w\,v^\tau,$$

gdje je $v^\tau = \xi^\tau D^{-1}$. Sada je očito da je $v$ lijevi glavni svojstveni vektor jer je, zbog (2.9)

$$\xi^\tau D^{-1}\frac{A}{\lambda}D = \xi^\tau$$

odnosno

$$v^\tau A = \lambda\, v^\tau$$

i

$$v^\tau w = \xi^\tau D^{-1}De = \xi^\tau e = 1.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan. □

LEMA 2.11. *Neka je* $0 < a$ *proizvoljan vektor i*

$$x_n := \frac{A^n a}{||A^n a||_a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Tada je*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha\, w$$

*gdje je* $\alpha = \frac{1}{\|w\|_a}$.

DOKAZ. Definicionu relaciju za $x_n$ možemo zapisati i na sljedeći način

$$\left\| \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n a \right\|_a x_n = \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n a,$$

odakle prema teoremu 2.10

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{w\,(v^\tau a)}{\|w\,(v^\tau a)\|_a} = \frac{w}{\|w\|_a}. \tag{2.10}$$

□

POSLJEDICA 2.12.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n e}{e^\tau A^n e} = \alpha\, w, \text{ za neko } \alpha > 0.$$

DOKAZ. Izraz u nazivniku je 1-norma od $A^n e$, dok $||\cdot||_e$ sada postaje max-norma. Dakle,

$$\begin{aligned} z_n &:= \frac{A^n e}{||A^n e||_1} \\ &= \frac{A^n e}{||A^n e||_e} \cdot \frac{||A^n e||_e}{||A^n e||_1} \\ &= \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \longrightarrow \frac{w}{\|w\|_1}. \end{aligned}$$

□

Posljedica 2.12 sugerira metodu za aproksimativno računanje svojstvenog vektora $w$ i Perronovog korijena. Odaberemo proizvoljan pozitivan vektor, najčešće je to $e$, stavimo $x_1 = Ae$ i računamo niz $x_{n+1} = Ax_n, n \geq 1$ s tim da vektor $x_n$ normiramo prije računanja sljedeće iteracije.

LEMA 2.13. *Neka je $A > 0$ i $\mu$ svojstvena vrijednost od $A$ različita od $\lambda = \rho(A)$. Tada je $|\mu| < \lambda$.*

DOKAZ. $Ax = \mu x \implies A^n x = \mu^n x$ i $\left(\frac{A}{\lambda}\right) x = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) x$. Zbog (2.8) postoji limes

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n x = w(v^\tau x) \tag{2.11}$$

pa je nužno $\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \leq 1$. Još treba vidjeti da je $|\mu| < \lambda$. Za $\mu = \lambda e^{i\theta}$ gornji limes ne postoji što je u suprotnosti s (2.8). Dakle, $|\mu| < \lambda$, što se i htjelo dokazati. □

POSLJEDICA 2.14. *Glavni lijevi svojstveni vektor okomit je na svaki desni svojstveni vektor različit od glavnog. Glavni desni svojstveni vektor okomit je na svaki lijevi svojstveni vektor različit od glavnog.*

DOKAZ. Neka je $Ax = \mu x$ desni svojstveni vektor od $A$ i $|\mu| < \lambda$. Iz formule (2.11) zaključujemo da je $w(v^\tau x) = 0$. Zbog $w > 0$ je sada $v^\tau x = 0$. $\square$

LEMA 2.15. *Svojstvena vrijednost $\lambda = \rho(A)$ je algebarske kratnosti 1, tj. ne postoji vektor $u \in \mathbb{R}^n$ takav da je $(A-\lambda I)^2 u = 0$ i $(A-\lambda I)u \neq 0$*

DOKAZ. Pretpostavimo da takav $u$ postoji. Tada je $w = (A - \lambda I)u$ desni glavni svojstveni vektor zbog jedinstvenosti istog. Sada je

$$\begin{aligned} Au &= \lambda u + w, \\ \frac{A}{\lambda} u &= u + \frac{w}{\lambda}, \\ \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n u &= \left(\frac{A}{\lambda}\right)^{n-1} u + \frac{w}{\lambda}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

U limesu, premi lemi (2.10), lijeva strana i prvi sumand na desnos strani konvergiraju prema $w$ pa je nužno $\frac{w}{\lambda} = 0$. No to je u suprotnosti s činjenicom da je $w > 0$. $\square$

**2.5. Brouwerov teorem.** Spomenimo još i poznati Brouwerov[4] teorem, bez dokaza, o egzistenciji fiksne točke neprekidnog preslikavanja koji je, historijski gledano, nastao kasnije od Perronovog. U literaturi ga ljudi često koriste za dokaz egzistencije Perronovog korijena.

TEOREM 2.16 (Brouwer). *Neka je $\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \sum \xi_i = 1\}$ i $f\colon \Sigma \to \Sigma$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji točka $x \in \Sigma$ koja je fiksna točka tog preslikavanja tj.*

$$f(x) = x.$$

Ako je $A$ pozitivna matrica i ako u Brouwerovom teoremu stavimo

$$\phi(x) := \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$$

onda je jasno da je fiksna točka $x$ od $\phi$ svojstven vektor od $A$ i $\|Ax\|_1$ je pripadna svojstvena vrijednost.

U Perronovom teoremu riječ je o linearnom preslikavanju što je daleko jači zahtjev nego samo neprekidnost koju zahtijeva Brouwerov teorem. Stoga je za očekivati da se Perronov teorem može dokazati elementatnijim sredstvima što je i učinjeno.

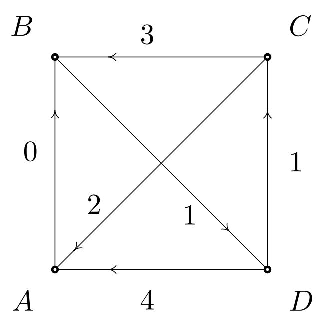
[4] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881–1966, Holandski matematičar i filozof.

## 3. Metoda potencijala

**3.1. Potencijal potpunog grafa.** Kod uspoređivanja u parovima, donosilac odluke, za svaki par alternativa jednoj od njih daje preferenciju ili ih proglašava jednako preferiranima (indiferentnima).

Za razliku od metode svojstvenog vektora koja koristi recipročnu pozitivnu matricu kao način organiziranja ulaznih podataka metoda potencijala ih organizira u graf preferencije. To je usmjerni graf s težinama u kojem je svakoj preferenciji pridjeljen i nenegativni broj, intenzitet preferencije, na nekoj skali. Cilj donosioca odluke je uključiti u svoju odluku ne samo preferencije nego i njihov intenzitet.

PRIMJER 3.1. Pretpostavimo da imamo četiri alternative i da je donosilac odluke dao preferencije kao na slici 2. Preferenciji $B \succcurlyeq A$ dan je intenzitet nula što drugim rječima znači da je također i $A \succcurlyeq B$, odnosno da je donosilac odluke indiferentan kad su u pitanju te dvije alternative. U tom slučaju je svejedno u kojem smjeru je orijentirana strelica.




SLIKA 2. Graf preferencije.

Cilj donosioca odluke je alternativama pridjeliti brojeve koji će odražavati njihovu 'vrijednost' i ujedno dati rangiranje. Jedan moguća procedura je sljedeća...

> ...strelicu $B \xrightarrow{1} D$ možemo interpretirati kao da je s tekućeg računa (u banci) alternativi $B$ uzeta jedna kuna i prebačena na tekući račun alternative $D$. Isto je tako $D$ svoje četiri kune dao alternativi $A$ itd. Nakon što je završio proces 'darivanja' izračunamo saldo na računu svake alternative.

Jednostavnosti radi pretpostavimo da je u samom početku saldo na svakom računu iznosio nula kuna. To znači da će nakon darivanja neki biti u 'minusu' a neki u 'plusu'. Za graf na slici 2 taj saldo iznosi

| | $X$ |
|---|---|
| $A$ | $6$ |
| $B$ | $2$ |
| $C$ | $-4$ |
| $D$ | $-4$ |

Ovako definirana funkcija saldo, u daljnjem tekstu `potencijal` i u oznaci $X$, postoji uvijek bez obzira na to da li je relacija preferencije tranzitivna ili ne. U ovom primjeru ordinalna funkcija vrijednosti, u smislu teorema 2.3, ne postoji jer je u grafu prisutan ciklus $C \to B \to D \to C$ koji narušava tranzitivnost.

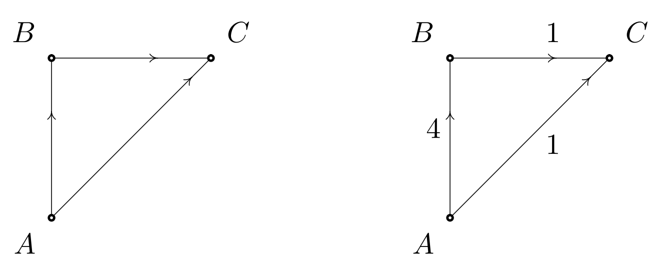
PITANJE.
Da li potencijal $X$ i ordinalna funkcija vrijednosti $V$, ako takva postoji, daju isto rangiranje, tj. da li postoji strogo rastuća funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $X = h \circ V$?

Evo jednog primjera prije nego li odgovorimo na postavljeno pitanje.

PRIMJER 3.2 (Inkonzistentnost slabe preferencije i potencijala). Graf na slici 3 lijevo predstavlja relaciju slabe preferencije

$$C \succcurlyeq B \succcurlyeq A$$

i (njoj) pridružena funkcija vrijednosti $V$, dana u tablici 3.1 usklađena je s tom relacijom Desni graf razlikuje se od lijevog po tome što su preferen-




SLIKA 3. Potencijal i funkcija vrijednosti.

cijama pridjeljene težine. Potencijal izračunat iz tih težina je $X$ i dan je u tablici 3.1 na str. 104. Očito je da $X$ nije u skladu sa slabom preferencijom jer bi inače $V$ i $X$ određivali jednak poredak alternativa.

| | $V$ | $X$ |
|---|---|---|
| $A$ | $1$ | $-5$ |
| $B$ | $2$ | $3$ |
| $C$ | $3$ | $2$ |

TABLICA 3.1. Inkonzistentnost potencijala i slabe preferencije.

Ovaj primjer sugerira zaključak da postoje situacije kad postoji i funkcija vrijednosti $V$ i potencijal $X$ koji nije u skladu sa slabom preferencijom. Da li je to ujedno i odgovor na postavljeno pitanje? Pročitajmo pitanje još jednom.

Na funkciju vrijednosti $V$ i na potencijal treba gledati kao na dvije različite metode. Pravo pitanje je što daju te dvije metode kad se primjene na isti graf, a ne na dva različita grafa kao što je to u prethodnom primjeru. Lijevi graf dobije se od desnog zanemarivanjem intenziteta preferencije. Nakon toga smo metodu funkcije vrijednosti primjenili na lijevi graf, a metodu potencijala na desni graf. Stupac $X$ i stupac $V$ u tablici 3.1 su dobiveni različitim metodama primjenjenim na različitim grafovima i stoga nije neočekivano da daju različito rangiranje.

Ako želimo usporediti dvije metode onda ih moramo primjeniti na istom grafu. Korektan postupak je sljedeći: Graf pridružen relaciji slabe preferencije možemo pretvoriti u graf s težinama tako da svakoj preferenciji pridružimo težinu 1. Time uvažavamo činjenicu da je preferencija kvalitativna (substancijalna) kategorija, a ne kvantitativna kao što je to intenzitet preferencije. Na takvom grafu možemo sada računati i potencijal i funkciju vrijednosti. Sada je očito da je saldo za $x \in S$

$$X(x) = \#\{y \in S \mid x \succ y\} - \#\{y \in S \mid y \succ x\}. \tag{3.1}$$

TEOREM 3.3. *Ako relaciji slabe preferencije $\succcurlyeq$ na skupu $S$ pridružimo usmjeren graf s težinama na gore opisani način onda je potencijal $X : S \to \mathbb{R}$ pridružen tom grafu funkcija vrijednosti.*

DOKAZ. Iz formule (3.1) slijedi da je

$$X(x) = 2V(x) - \#[x] - \#S$$

gdje je $[x]$ oznaka za klasu ekvivalencije od $x$ tj.

$$[x] := \{y \in S \mid y \sim x\}.$$

Ako je $y \sim x$ tada je evidentno $[x] = [y]$ i $V(x) = V(y)$ što povlači $X(x) = X(y)$. Neka je sada $x \succ y$, tj. $x \succcurlyeq y$ i $x \not\sim y$. Tada je

$$\begin{aligned} X(x) - X(y) &= V(x) - V(y) + V(x) - \#[x] - (V(y) - \#[y]) \\ &> V(x) - \#[x] - (V(y) - \#[y]) \\ &= \#\{z \in S \mid x \succ z\} - \#\{z \in S \mid y \succ z\} \end{aligned}$$

što zbog tranzitivnosti relacije $\succ$ i $x \succ y$ povlači nejednakost

$$X(x) - X(y) \geq 0.$$

Time smo dokazali da

$$x \succcurlyeq y \Rightarrow X(x) \geq X(y). \tag{3.2}$$

Još preostaje dokazati implikaciju $X(x) \geq X(y) \Rightarrow x \succcurlyeq y$. Pretpostavimo li, suprotno tvrdnji, da implikacija nije istinita, tada postoje $x, y \in S$ takvi da je $X(x) \geq X(y)$ i $y \succ x$. Zbog (3.2) je sada $X(y) \geq X(x)$, a kako je $y \not\sim x$ to je $X(y) > X(x)$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Time su implikacija, a ujedno i teorem, dokazani. □

**3.2. Veza između potencijala $X$ i toka $\mathcal{F}$.** Ono što je potrebno za daljnju analizu i teoriju je kompaktniji zapis veze između potencijala i toka koji će biti moguće poopćiti. Radi jednostavnijeg zapisa pretpostavimo da je skup alternativa $S = \{1, \ldots, n\}$ i da je graf preferencije potpun, tj. ima $\binom{n}{2}$ lukova. Ako je $i \succcurlyeq j$ onda je definiran luk $\alpha = (i, j)$, od manje preferirane alternative prema većoj, a odgovarajući intenzitet preferencije označimo s $\mathcal{F}_\alpha$. Skup svih lukova označimo s $\mathcal{A}$. Potencijal $X_i$ za alternativu $i$ definirali smo kao sumu svih uplata i isplata na njen tekući račun tj.

$$X_i = \sum_j \mathcal{F}_{(i,j)} - \sum_j \mathcal{F}_{(j,i)}. \tag{3.3}$$

Gornju formulu za potencijal možemo pojednostaviti ako uvedemo matricu toka $F$ definiranu na sljedeći način

$$F_{ij} = \begin{cases} F_{(i,j)}, & \text{ako } (i,j) \in \mathcal{A} \\ -F_{(j,i)}, & \text{ako } (j,i) \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Ako još stavimo da je po definiciji $F_{ii} = 0$ za svako $i = 1, \ldots, n$ onda je matrica $F$ antisimetrična. Gornja formula za potencijal se sada svodi na računanje sume elemenata u $i$-tom retku matrice $F$. Pokazuje se boljim koristiti formulu za potencijal u kojoj se računa srednja vrijednost elemenata u retku matrice $F$. Razlog tome će kasnije biti jasan. Dakle,

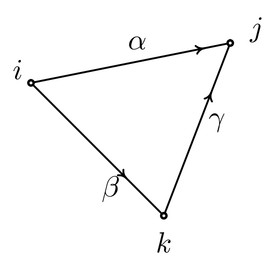
$$X_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_{ij}, \tag{3.4}$$

Iz formule (3.4) slijedi da je potencijal $X$ (za potpuni graf preferencija) aritmetička sredina stupaca matrice toka $F$.

### 3.3. Konzistentnost toka.

> Inkonzistentnost je više od nedostatka tranzitivnosti. Ona navodi na zaključak da nikakva optimizacijska procedura ne stoji čak ni iza najjednostavnijih izbora koje ljudi čine i da uniformnost tržišnog ponašanja ljudi možda izvire iz principa koji su potpuno drugačije prirode od općenito prihvaćenih.
>
> Grether and Plott, 1979.

U lingvističkom smislu biti konzistentan znači biti u skladu (sa svojim postupcima), biti nekontadiktoran. U terminima grafa preferencija to znači da za cikluse u usmjerenom grafu s težinama poput ovog na slicu 4 vrijedi




SLIKA 4. Konzistentan ciklus.

relacija $F_\beta + F_\gamma = F_\alpha$. Takvu preciznost je teško postići posebno ako se radi o subjektivnim procjenama za intenzitete $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$. Općenito govoreći tok $\mathcal{F}$ smatrati ćemo ***konzistentnim*** ako je za svaki ciklus grafa suma (algebarskih) komponenata toka duž ciklusa jednaka nuli. Ako je luk $\alpha$ uključen u ciklus onda u sumu ulazi $\mathcal{F}_\alpha$, ako je $-\alpha$ uključen u ciklus onda u sumu ulazi $\mathcal{F}_\alpha$. Preciznije, ako je $y = \sum_i y_i \alpha_i$ ciklus, tada je $y_i = \pm\alpha_i$

ovisno o tome je li orijentacija luka $\alpha_i$ u skladu s orijentacijom ciklusa ili nije. Tok je konzistentan ako i samo ako je za svaki ciklus $y$

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \mathcal{F}_{\alpha_i} = 0. \tag{3.5}$$

ili, što je ekvivalentno, da je skalarni produkt

$$y^\tau \mathcal{F} = 0.$$

Posebno zanimljivo u metodi potencijala je da ona nudi ***mjeru inkonzistentnosti***, a to je broj koji ukazuje koliko je dani tok 'daleko' od inkonzistentog toka. Općenito govoreći, mjera inkonzistentnosti je broj $\mu(\mathcal{F})$ pridružen ulaznim parametrima, u ovom slučaju je to tok $\mathcal{F}$, koji je jednak nuli ako i samo ako je $\mathcal{F}$ konzistentan tok u gornjem smislu, (v. teorem 3.4). Cilj svake teorije koja ima takvu mjeru je odrediti graničnu vrijednost prihvatljivosti $\mu^* > 0$ sa svojstvom da tok smatramo 'prihvatljivim' ako je $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu^*$. Granica prihvatljivosti $\mu^*$, naravno, ovisi o broju alternativa. Za geometrijski smisao konzistentnosti vidi poglavlje 3.7.

**3.4. Nužan i dovoljan uvjet za konzistentnost.** Nužan i dovoljan uvjet za konzistentnost toka je direktna posljedica definicije $(3.5)$.

TEOREM 3.4. *Tok $\mathcal{F}$ je konzistentan ako i samo ako je $\mathcal{F}$ linearna kombinacija stupaca matrice incidencije $A$ pridruženog grafa preferencije, odnosno ako i samo ako postoji $X \in \mathbb{R}^n$ tako da je*

$$AX = \mathcal{F}. \tag{3.6}$$

DOKAZ. Zbog $y^\tau \mathcal{F} = 0$ je tok $\mathcal{F}$ okomit na svaki ciklus $y$ pa je okomit i na potprostor generiran ciklusima, a to je jezgra transponirane matrice $A^\tau$. Ova posljednja tvrdnja je posljedica teorema o rangu i dekompozicije

$$R(A) \oplus N(A^\tau) = \mathbb{R}^m. \tag{3.7}$$

Ortogonalnost $\mathcal{F} \perp N(A^\tau)$ ima za posljedicu $\mathcal{F} \in R(A)$ što se i htjelo dokazati.

Obratno, pretpostavimo da je $AX = \mathcal{F}$ za neki $X \in \mathbb{R}^n$. Tada za svaki ciklus $y \in N(A^\tau)$ vrijedi, zbog dekompozicije (3.7), $y^\tau \mathcal{F} = y^\tau AX = 0$ što dokazuje tvrdnju. $\square$

**3.5. Potencijal nepotpunog grafa.** Jednadžba (3.6) određuje potencijal ako i samo ako je $\mathcal{F}$ konzistentan. Ako taj uvjet nije ispunjen onda ima smisla tražiti najbolju aproksimaciju od $\mathcal{F}$ u prostoru stupaca matrice $A$. Jedan od načina da se to napravi jest naći minimum kvadratične funkcije

$$Q(y) = \frac{1}{2}(y - \mathcal{F})^\tau (y - \mathcal{F}) \tag{3.8}$$

uz uvjet $y \in R(A)$. Ekvivalentan uvjet je $y^\tau z = 0$ za svaki $z \in N(A^\tau)$ što je posljedica ortogonalne dekompozicije (3.7). Minimizacija funkcije, pogotovo ako se radi o uvjetnoj minimizaciji, nije nimalo lak zadatak. Ovdje imamo dvije pogodnosti, jedna je da je funkcija koju minimiziramo kvadratična, a druga da su uvjeti linearni.

TEOREM 3.5. *Točka $y \in R(A)$ je točka minimuma restrikcije $Q\big|_{R(A)}$ ako i samo ako postoji $z \in N(A^\tau)$ i $X \in \mathbb{R}^n$ tako da vrijedi*

$$y \oplus z = \mathcal{F}, \quad y = AX. \tag{3.9}$$

DOKAZ. Označimo $M := R(A)$ i pretpostavimo da je $y$ točka minimuma restrikcije $Q\big|_M$. To znači da je

$$Q(y) \leq Q(y + tv) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ i } \forall v \in M$$

odakle slijedi

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\{Q(y + tv) - Q(y)\} = Q'(y)v \geq 0.$$

Zamjenom $v$ s $-v$ u gornjoj nejednakosti zaključujemo da je

$$Q'(y)v = 0, \text{ za svaki } v \in M. \tag{3.10}$$

Primijetimo da je dosadašnji račun proveden za bilo koju diferencijabilnu funkciju $Q$. Specificiramo li sada da je $Q$ kvadratična funkcija dana formulom (3.8) tada je derivacija od $Q$ jednaka $Q'(y) = y^\tau - \mathcal{F}^\tau$ pa gornju formulu možemo zapisati u obliku

$$(y - \mathcal{F})^\tau v = 0, \text{ za svaki } v \in M,$$

što zbog dekompozicije $N(A^\tau) \oplus R(A) = \mathbb{R}^m$ implicira da je $y - \mathcal{F} \in N(A^\tau)$. Tada postoji $X \in \mathbb{R}^n$ i $z \in N(A^\tau)$ tako vrijedi (3.9).

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (3.9). Za dokaz tvrdnje dovoljno je dokazati nejednakost $Q(y + tv) \geq Q(y)$ za svaki realni broj $t \in \mathbb{R}$ i svaki $v \in M$. U tu svrhu računamo

$$\begin{aligned} Q(y + tv) &= \frac{1}{2}(y + tv - \mathcal{F})^\tau (y + tv - \mathcal{F}) \\ &= \frac{1}{2}(y - \mathcal{F})^\tau (y - \mathcal{F}) + \frac{1}{2}t^2 v^\tau v + t(y - \mathcal{F})^\tau v \\ &= Q(y) + \frac{1}{2}t^2 v^\tau v, \end{aligned}$$

jer je $y - \mathcal{F} \perp M$, što dokazuje traženu nejednakost. □

POSLJEDICA 3.6. *Točka $y \in R(A)$ je točka minimuma restrikcije $Q\big|_{R(A)}$ ako i samo ako postoji $X \in \mathbb{R}^n$ tako da je $y = AX$ i*

$$A^\tau AX = A^\tau \mathcal{F}. \tag{3.11}$$

DOKAZ. Pomnožimo li jednadžbu (3.9) s $A^\tau$ dobije se jednadžba $A^\tau AX = A^\tau \mathcal{F}$ jer je $z \in N(A^\tau)$. Obratno, ako vrijedi (3.11) onda je $A^\tau(AX - \mathcal{F}) = 0$ što znači da je $AX - \mathcal{F} \in N(A^\tau)$ i vrijedi (3.9) za $y = AX$. $\square$

Jednadžbu (3.11) nazivamo normalnom jednadžbom koja je pridružena jednadžbi $AX = \mathcal{F}$. Sada možemo definirati pojam normalnog integrala zadanog toka $\mathcal{F}$ koji je centralni pojam u teoriji potencijala.

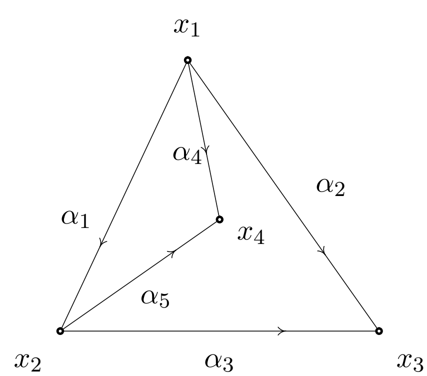
DEFINICIJA 3.7. Neka je $\mathcal{F} \geq 0$ zadani nenegativni tok definiran na lukovima usmjerenog grafa. ***Potencijal*** od $\mathcal{F}$ je rješenje jednadžbe $AX = \mathcal{F}$ ako je $\mathcal{F} \in R(A)$ ili jednadžbe $A^\tau AX = A^\tau \mathcal{F}$ ako $\mathcal{F} \notin R(A)$. U oba slučaja zahtjevamo $\sum_i X_i = 0$ zbog jedinstvenosti.

Uvjet $\sum_i X_i = 0$ zaslužuje komentar. Matrica $A$, ako je graf povezan, ima jednodimenzionalnu jezgru generiranu vektorom $\mathbb{1}$ čije su sve komponenete jednake 1. Ako graf ima više komponenata povezanosti tada je jezgra od $A$ tolike dimenzije koliki je broj komponenata povezanosti. U tom slučaju, umjesto zahtjeva $\sum_i X_i = 0$ zahtjevati ćemo da je rješenje $X$ normalne jednadžbe (3.11) okomito na karakterističnu funkciju svake komponente povezanosti. U daljnjem tekstu pretpostavljamo da je graf povezan.

**3.6. Lapaceova matrica grafa.** Ako je $A$ matrica incidencije grafa onda matricu $A^\tau A$ nazivamo Laplaceovom matricom grafa i možemo je jednostavno izračunati. Izvan dijagonale, tj. za $j \neq k$

$$(A^\tau A)_{jk} = \begin{cases} -1. & \text{ako su } j, k \text{ susjedni čvorovi,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

To se najbolje vidi ako direktno pomnožimo $A^\tau$ i $A$. $j$-ti redak od $A^\tau$ je $j$-ti stupac od $A$; ako je $j \neq k$ i postoji luk od čvora $j$ do čvora $k$ onda je




SLIKA 5. Nepotpun graf.

produkt $j$-tog i $k$-tog stupca jednak $-1$, inače je taj produkt jednak nuli. Na glavnoj dijagonali matrični elementi su pozitivni

$$(A^\tau A)_{kk} = \text{broj susjednih čvorova od } k.$$

Kao primjer za ilustraciju uzmimo mrežu s četiri nodalne varijable i pet lukova na slici 5. Njegova matrica incidencije $A$ i matrica $A^\tau A$ su

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^\tau A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrica $A^\tau A$ je simetrična ali nije pozitivno definitna jer $A$ ima netrivijalnu jednodimenzionalnu jezgru.

Interesantno je proučiti Laplaceovu matricu za potpun graf. Tada svaki čvor u grafu ima $n-1$ susjeda i Laplaceova matrica ima svuda na dijagonali broj $n-1$, dok su ostali matrični elementi jednaki $-1$. U tom slučaju je potencijal jednostavno izračunati i to na sljedeći način. Svakom retku normalnog sistema jednadžbi (3.11) pribrojimo uvjet $\sum_i X_i = 0$ i dobiti ćemo ekvivalentan sistem jednadžbi s dijagonalnom matricom jednakom $nI$. Rješenje tog sistema je

$$n \cdot X_i = (A^\tau \mathcal{F})_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pogledamo li malo pažljivije desnu stranu gornjeg sistema uočit ćemo da je (za fiksni $i$) desna strana dobivene jednadžbe upravo razlika između ulaznog i izlaznog toka u čvoru $i$ što smo ranije nazvali saldo, v. jednadžbu (3.3) na str. 105. To znači da je potencijal potpunog grafa jednak srednjoj vrijednosti stupaca matrice toka $F$ pridružene toku $\mathcal{F}$ kao u formuli (3.4).

**3.7. Inkonzistentnost. Geometrijski smisao.** Kao i u slučaju potpunog grafa tok $\mathcal{F}$ smatramo konzistentnim ako vrijedi $AX = \mathcal{F}$ za neki $X \in \mathbb{R}^n$. U slučaju da $\mathcal{F}$ nije konzistentan tada kao mjeru inkonzistentnosti možemo sam kut između toka $\mathcal{F}$ i njegove aproksimacije $AX$ ili broj

$$\mu(\mathcal{F}) = \frac{\|AX - \mathcal{F}\|}{\|\mathcal{F}\|} \tag{3.12}$$

gdje je $X$ potencijal od $\mathcal{F}$ i $\|\cdot\|$ euklidska norma. $AX$ je najbolja aproksimacija od $\mathcal{F}$ u prostoru $R(A)$ i gornja mjera je sinus kuta između vektora $\mathcal{F}$ i tog prostora. Što je taj kut veći to znači da su procjene intenziteta preferencija u grafu lošije. Specijalno, svaki ciklus koji se pojavljuje u grafu povećava komponentu od $\mathcal{F}$ koja je okomita na $R(A)$ i time povećava inkonzistentnost. Razlog tome je taj što je prostor $N(A^\tau)$ generiran ciklusima, v. formulu (3.7).

Proces rangiranja metodom potencijala na zadanom skupu alternativa započinje utvrđivanjem grafa preferencije, određivanjem njegove matrice incidencije $A$, mjerenjem nenegativnog toka preferencije $\mathcal{F}$ i računanjem normalnog integrala $X$. Dobiveni potencijal $X$ ne mora nužno biti funkcija vrijednosti, ali jest ako je unimodularni graf preferencije slaba preferencija. Također je očito, što je posljedica teorema 3.4, da konzistentan tok generira potencijal koji je funkcija vrijednosti. Formulirajmo to kao posebnu tvrdnju.

TEOREM 3.8. *Potencijal $X$ pridružen nenegativnom toku $\mathcal{F}$ je funkcija vrijednosti ako je tok preferencija $\mathcal{F}$ konzistentan.*

DOKAZ. Ako je $\mathcal{F} \in R(A)$ i $X$ potencijal od $\mathcal{F}$ onda je očito $AX = \mathcal{F}$ prema posljedici 3.6. No tada je za svaki luk $\alpha = (a, b)$

$$(AX)_\alpha \geq 0 \Leftrightarrow X_a \geq X_b \Leftrightarrow F_\alpha \geq 0 \Leftrightarrow a \succcurlyeq b,$$

a to pokazuje da je $X$ funkcija vrijednosti. $\square$

Obrat teorema nije istinit što se vidi iz sljedećeg primjera. U primjeru 3.2 na str. 103 promijenimo težinu preferencije $A \xrightarrow{4} B$ na $A \xrightarrow{2} B$, dok težine ostalih preferencija ostavljamo kakve jesu. Novi tok nije konzistentan ali je novi potencijal funkcija vrijednosti što se vidi iz tablice 3.2. Funkcija vrijednosti $V$ ostala je ista.

| | $V$ | $X$ |
|---|---|---|
| $A$ | 1 | $-2$ |
| $B$ | 2 | 1 |
| $C$ | 3 | 2 |

TABLICA 3.2. Inkonzistentan tok generira funkciju vrijednosti.

Gornji kontraprimjer otvara sljedeći problem:

ZADATAK 3.9. Naći dovoljan uvjet na $\mathcal{F}$ da bi njegov potencijal bila funkcija vrijednosti.

Pažljiviji čitalac će odmah prigovoriti da je definicija konzistentnosti toka, $\mathcal{F} \in R(A)$, prestroga. Prigovor je na mjestu sa kvalitativne (substancijalne) gledišta. Trenutačni odgovor na prigovor je da zato imamo mjeru inkonzistentnosti toka koja mjeri njegovu udaljenost od skupa konzistentnih tokova. Ovisno o gornjoj granici prihvatljive inkonzistentnosti $\mu_*$ (v. diskusiju u 3.3) možemo biti manje ili više strogi što se tiče prihvaćanja odluke.

To još nije odgovor na postavljeno pitanje kako oslabiti pojam inkonzistentnosti. Razuman pristup bio bi sljedeći: Ako graf preferencije generira uređaj slabe preferencije i nije konzistentan onda možemo reći da je $\mathcal{F}$ ***slabo konzistentan***. Ako je $\mathcal{F}$ slabo konzistentan to još uvijek ne znači da je njegov potencijal funkcija vrijednosti što se vidi iz primjera 3.2. Druga mogućnost je umjesto potencijala uzme neki hibrid koji će ujediniti i svojstva potencijala i biti usklađen s relacijom preferencije. Takav hibrid postoji i nazivamo ga `ordinalnim potencijalom` od $\mathcal{F}$, v. V. Šego [**?**].

**3.8. Analiza primjera 1.2.** Ovdje ćemo sugerirati nekoliko načina kako se može modelirati razmišljanje donosioca odluke u primjeru 1.2 (str. 14) pomoću metode potencijala.

3.8.1. *Direktan pristup.* U direktnom pristupu koristiti ćemo kao ulazne podatke one iz tablice u na str. 14. Matrica toka je, pošto sad nemamo subjektivne procjene već egzaktne podatke, određena razlikama zadanih vrijednosti. To znači da je komponenta matrice toka $F$ na mjestu $ab$ jednaka

$$F_{ab} = (18 - 18) + (7 - 12) + (11 - 6) = 0 - 5 + 5 = 0,$$

a na mjestu ac

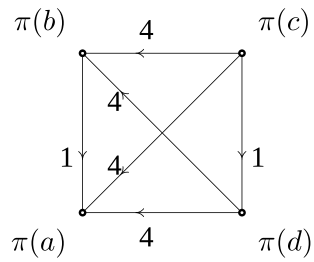
$$F_{ac} = 18 - 5 + (12 - 17) + (6 - 8) = 13 - 5 - 2 = 6.$$

Izračunamo li komponente toka za ostale parove dobije se matrica toka i potencijal $X$ u pretposljednjem stupcu prema formuli (3.4):

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $X$ | $SO$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $0$ | $0$ | $6$ | $6$ | $3$ | $9$ |
| $b$ | $0$ | $0$ | $6$ | $6$ | $3$ | $9$ |
| $c$ | $-6$ | $-6$ | $0$ | $0$ | $-3$ | $7.5$ |
| $d$ | $-6$ | $-6$ | $0$ | $0$ | $-3$ | $7.5$ |

U krajnjem desnom stupcu ($SO$) smo zapisali srednju ocjenu dobivenu iz tablice na str. 14. Vidimo da niti potencijal niti srednja ocjena ne razlikuju studenta $a$ od $b$ niti studenta $c$ od studenta $d$. U čemu je onda prednost metode potencijala? U ovako strukturiranom modelu njena prednost nije mogla doći do izražaja. Primjer samo vodi na zaključak da u modelima gornjeg tipa gdje možemo računati srednju vrijednost i potencijal i srednja vrijednost daju isto rangiranje. Taj je zaključak sasvim u redu jer je potencijal za potpuni graf dobijemo kao srednju vrijednost stupaca matrice toka $\mathcal{F}$.

3.8.2. *Subjektivan pristup.* Analiziramo li tok misli ocjenjivača (donosioca odluke) u primjeru 1.2 doći ćemo do grafa preferencija među profilima kao na slici 6. Tu smo uvažili konstataciju da su preferencije od $a$ i




SLIKA 6. Subjektivne preferencije iz primjera 1.2.

$b$ u odnosu na $c$ i $d$ jednake težine i to u korist $a$ i $b$. Malu prednost ima $d$ u odnosu na $c$ i istu toliku $a$ u odnosu na $b$. Matrica toka i potencijal su

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $0$ | $1$ | $4$ | $4$ | $2.25$ |
| $b$ | $-1$ | $0$ | $4$ | $4$ | $1.75$ |
| $c$ | $-4$ | $-4$ | $0$ | $-1$ | $-2.25$ |
| $d$ | $-4$ | $-4$ | $1$ | $0$ | $-1.75$ |

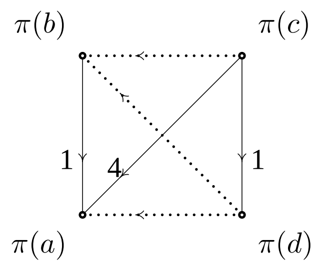
što daje poredak

$$a \succcurlyeq b \succcurlyeq d \succcurlyeq c$$

kao i u primjeru 1.2.

3.8.3. *Nepotpuni podaci.* Iskoristimo ješ jednu mogućnost metode da dozvoljava nepotpun graf preferencije. Crtkane strelice predstavljaju 'zaboravljene' preferencije iz potpunog grafa. Preferencija $\pi(c) \xrightarrow{4} \pi(a)$ daje odnos između klasa, a preferencije $\pi(b) \xrightarrow{1} \pi(a)$ i $\pi(c) \xrightarrow{1} \pi(d)$ daju odnose unutar svake klase. Takav model daje sljedeće rezultate u tablici 3.3. Inkonzistentnost toka iznosi $\mu(\mathcal{F}) = 0$ jer nema 'suvišnih' podataka.

3.8.4. *Uvođenje novih kriterija.* Interakciju kriterija kao u primjeru 1.2 zvati ćemo ***koalicijom***. Jedan od načina modeliranja takvih problema dan je u članku Grabish [**16**] i to tehnikom fuzzy logike. Ovdje ćemo dati dva modela koristeći metodu potencijala. U svakom od modela uvode se




SLIKA 7. Nepotpune preferencije iz primjera 1.2.

| | X | w |
|---|---|---|
| a | 2 | 0.593 |
| b | 1 | 0.296 |
| c | -2 | 0.037 |
| d | -1 | 0.074 |

TABLICA 3.3. Nepotpuni podaci.

novi kriteriji. U prvom ćemo uvesti kriterije $FM$, $ME$, $FE$ koji predstavljaju koalicije od po dva kriterija. ***Snaga koalicije*** je suma bodova svakog člana koalicije. Smatramo da je koalicija 'labava' ako je njena snaga ispod 20 bodova[5]. U slučaju labave koalicije naprosto nećemo uvažavati njenu snagu tj. broj bodova i praviti se kao da ne postoji taj podatak. Nova tablica, s proširenim skupom kriterija, je tablica 3.4. U njoj je sa zvjezdicom ($*$) označena labava koalicija. U drugom retku tablice su dane relativne

[5]Ovdje se očito vidi utjecaj praga prolaznosti koji iznosi 10 bodova za ljestvicu 1–20.

| | $F$ | $M$ | $E$ | $FM$ | $ME$ | $FE$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 5 | 5 | 2 | 2 | 2 |
| $a$ | 18 | 12 | 6 | 30 | $*$ | 24 |
| $b$ | 18 | 7 | 11 | 25 | $*$ | 29 |
| $c$ | 5 | 17 | 8 | 22 | 25 | $*$ |
| $d$ | 5 | 12 | 13 | $*$ | 25 | $*$ |

TABLICA 3.4. Koalicija kriterija.

težine pojedinih kriterija. Težine kriterija smo odredili tako da svi kriteriji imaju jednake težine i sve koalicije imaju jednake težine s tom razlikom što su težine koalicija manje jer smatramo da bi njihov utjecaj trebao biti mala perturbacija u odnosu na rangove koje bi dobili bez koalicija[6]. Rezultati rangiranja pomoću metode potencijala su

| | PM – rang |
|---|---|
| $a$ | 0.286 |
| $b$ | 0.281 |
| $d$ | 0.221 |
| $c$ | 0.212 |

što je prilično u skladu s razmišljanjem iz primjera 1.2.

3.8.5. *Oscilacija kao kriterij.* Neki nastavnici smatraju da je dobro uvesti novi kriterij 'varijacija ocjena'. Razmišljanje u primjeru 1.2 sugerira da za dva studenta s istim zbrojem bodova bolji je onaj čije ocjene manje variraju. Kao mjeru oscilacije uzet ćemo najjednostavniju, a to je razlika između najvećeg i najmanjeg podatka. U tom slučaju tablica izgleda

| | $F$ | $M$ | $E$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 4 | 4 | 1 |
| $a$ | 18 | 12 | 6 | 12 |
| $b$ | 18 | 7 | 11 | 11 |
| $c$ | 5 | 17 | 8 | 12 |
| $d$ | 5 | 12 | 13 | 8 |

gdje je $V$ oznaka za varijaciju. U drugom retku tablice zapisali smo težine kriterija, a težinu varijacije kao kriterija uzeli smo da je četiri puta manja u odnosu na težinu kriterija iz istog razloga kao i ranije za koaliciju. Istaknimo da se manja varijacija smatra boljom. Rezultati rangiranja su sada:

| | rang |
|---|---|
| $b$ | 0.298 |
| $a$ | 0.297 |
| $d$ | 0.204 |
| $c$ | 0.200 |

Uvođenjem kriterija 'oscilacija' uspjeli smo postići da $d$ bude bolje rangiran nego $c$ ali ne i da $a$ bude bolje rangiran od $b$ jer $b$ ima manju oscilaciju

[6]U primjeni teorije potencijala na egzaktne podatke uvodi se novi parametar $FN$, 'flow–norm', kojeg smo odredili tako da je jednak za sve kriterije i ima vrijednost 2. Za definiciju $FN$ v. Čaklović [**38**].

ocjena. Sama oscilacija kao dodatni kriterij očito nije dovoljna za objašnjenje ispitivačevog načina razmišljanja.

### 3.9. Primjer grupne odluke.

PRIMJER 3.10. Na takmičenju iz matematike bila su 4 zadatka. Komisija je odredila jednak broj bodova za svaki exercise. Nakon takmičenja uočeno je da su neki zadaci teži od ostalih pa je svaki član komisije zamoljen da, nezavisno od ostalih, odredi graf preferencija (težine) u odnosu na svaki od sljedećih kriterija: 'Teorijska složenost' (TS), 'Računska složenost' (RS), 'Logika' (L). Ako je za rješavanje zadatka nužno neko predznanje u formi teorema onda će TS-komponenta zadatka biti dominantna, ako je za rješavanje zadatka potrebna vještina u računanju ili programiranju onda će RS-komponenta zadatka biti dominantna, a ako nije nužno poznavanje teorije i nema računa već se zahtjeva povezivanje ili se traži neka struktura onda je L-komponenta dominantna. Svaki ocjenjivač je određivao i važnost kriterija i težinu exercisea uspoređivanjem u parovima po vlastitoj procjeni. Rezultati grupne odluke, temeljene na teoriji potencijala, prikazani su u tablici 3.5 U tablici su prikazani sljedeći podaci (od

| | Težina u postocima | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| exercise | Član A | Član B | Član C | Član D | Grupa |
| 1 | 16.8 | 15.9 | 13.8 | 21.2 | 17.7 |
| 2 | 24.0 | 8.7 | 23.1 | 23.7 | 19.5 |
| 3 | 32.8 | 16.6 | 25.2 | 34.6 | 27.7 |
| 4 | 26.4 | 58.8 | 38.0 | 20.5 | 35.1 |

TABLICA 3.5. Grupna odluka.

lijeva na desno):

- rangovi svakog člana komisije prema gornjim kriterijima izraženi u postocima;
- grupni konsenzus.

Na pitanje slažu li se sa svojom odlukom članovi su odgovorili: "Uglavnom da", a na pitanje da li se slažu s grupnom odlukom odgovor je bio nešto pozitivniji.

# Bibliografija


1. M. Barbut, *Médians, Condorcet et Kendall*, Mathématiques et Sciences Humaines (1980), no. 69, 5–13.
2. J. A. Bargh, *Automatic and conscious processing of social information*, vol. 3, pp. 1–43, Hillsdale, NJ, Erlbaum, 1984.
3. J. Baron, *Thinking and deciding*, ambridge Univ. Press, 1994.
4. A. Bechara, H. Damasio, D. Tranel, and A. R. Damasio, *Deciding advantageously before knowing the advantageous strategy*, Science (1997), no. 275, 1293–1295.
5. Ross Buck, *Human motivation and emotion*, Wiley.
6. L. Carroll, *What the Tortoise Said to Achilles*, Mind, n.s., no. 4, 278–280.
7. J. Ceraso and A. Provitera, *A sources of error in syllogistic reasoning*, Cognitive Psychology, no. 2, 400–410.
8. L. J. Chapman and J. P. Chapman, *Atmosphere effect reexamined*, J. of Experimental Psychology, no. 58, 220–226.
9. L. Cosmides, *Deduction or Darwinian algorithm? An explanation of the "elusive" content effect on the Wason selection task*, Ph.D. thesis, Dept. of Psych., Harvard, 1985.
10. A. R. Damasio, *Toward a Neurobiology of Emotion and Feeling: Operational Concepts and Hypotheses.*, The Neuroscientist (1995), no. 1, 19–25.
11. Antonio Damasio, *Descartes' error: Emotion, reason and the human brain*, Macmillan, 1996.
12. D. N. Davis, *Minds have personalities - Emotion is the core*, http://www.cs.bham.ac.uk/ axs/aisb2000/papers/darryl.paper.pdf.
13. J-M. Fellous, J. L. Armony, and J. E. LeDoux, *Emotional Circuits*, The Handbok of Brain Theory and Neural Networks (M. A. Arbib, ed.), 2003.
14. P. C. Fishburn, *Utility theory for decision making*, John Wiley, 1970.
15. K. M. Galotti, J. Baron, and J. Sabibi, *Individual differences in syllogistic reasoning: Deduction rules or mental models*, J. of Experimental Psych., no. 115, 16–25.
16. Michel Grabisch, *The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making*, European Journal of Operational Research **89** (1996), no. 3, 445–456.
17. M. Henle, *On the relation between logic and thinking*, Psychological Review, no. 69, 366–378.
18. P. N. Johnson-Laid, *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference and consciousness*, Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press., 1983.
19. P. N. Johnson-Laid and B. G. Bara, *Syllogistic inference*, Cognition (1984), no. 16, 1–61.
20. P. N. Johnson-Laid and M. Steedman, *The psychology of syllogisms*, Cognitive Psychology (1978), no. 10, 64–99.
21. Daniel Kahneman and Amos Tversky, *Prospect theory: An analysis of decision under risk.*, Econometrica **47** (1979), 263–291 (English).

22. D. H. Krantz, R. D. Luce, P. Suppes, and A. Tversky, *Foundations of measurements, vol. 1: Additive and polinomial representations*, Academic Press, New York, 1971.
23. J. LeDoux, *The emotional brain*, Simon & Schuster, New York, 1996.
24. J. E. LeDoux, *Emotion: Clues from the Brain*, Annual Review of Psychology, no. 46, 209–235.
25. ______, *The neurobiology of emotion*, Mind and Brain. Dialogues in cognitive neuroscience (J. E. LeDoux and W. Hirst, eds.), Cambridge University Press, 1986, pp. 301–354.
26. ______, *Emotion and the Amygdala*, The Amygdala: Neurobiological Aspects of Emotion, Memory and Mental Dysfunction (J. P. Aggleton, ed.), Wiley–Liss, 1992, pp. 339–351.
27. G. F. Loewenstein, E. U. Weber, C. K. Hsee, and N. Welch, *Risk as Feelings*, Psychological Bulletin (2001), no. 2, 267–286.
28. Boris Petz, *Psihologijski rječnik*, Prosvjeta, Zagreb, 1992.
29. Steven Pinker, *How the Mind Works*, Penguin, London, 1997.
30. M. Profet, *Protecting Your Baby-To-Be: Preventing Birth Defects in the First Trimester*, Perseus Publishing, 1995.
31. F. S. Roberts, *Measuremenr theory*, Addision Wesley, 1979.
32. T. L. Saaty, *The analytic hierarchy process*, RWS Publications, Pittsburg, 1996.
33. S. Scribner, *Modes of thinking and ways of speaking: Culture and logic recinsidered*, Thinking: Readings in cognitive science (New York) (P. N. Johnson-Laird and P. C. Wason, eds.), Cambridge Univ. Press, 2003, pp. 483–500.
34. A. Sloman, *Architectural requirements for human-like agents both natural and artificial*, Benjamins Publishing, Dautenhahn, K., 1999.
35. S. A. Sloman, *The empirical case for two systems of reasoning*, Psychological Bulletin (1996), no. 119, 3–22.
36. S. E. Toulmin, *The uses of argument*, Cambridge Univ. Press, 1958.
37. L. Čaklović, *Decision making via potential method*.
38. Lavoslav Čaklović and Vedran Šego, *Potential Method applied on exact data*, Proceedings of KOI 2002 (Kristina Šorić, Tihomir Hunjak, and Rudolf Scitovski, eds.), Croational Operational Research Society, Trogir, Croatia, October 2-4.2002, pp. 237–248.
39. John von Neumann and Oskar Morgenstern, *Theory of games and economic behavior. 1st paperback ed. (Repr. of 3rd ed. H/C).*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press. XX, 641 p. $ 13.00 , 1980 (English).
40. J. F. Voss, S. W. Tyler, and L. A. Yengo, *Individual differences in the solving of social science problems Vol. 1*, Individual differences in cognition (R. F. Dillon and R. R. Schmeck, eds.), Academic Press, New York, 1983, pp. 205–232.
41. M Vuković, *Matematička logika 1*, Sveučilište u Zagrebu, Matematički odjel, Zagreb, 1999.
42. P. Wason, *Reasoning*, New horizons in psychology (B. M. Foss, ed.), London, Penguin, 1966.
43. T. D. Wilson, D. J. Lisle, J. W. Schooler, S. D. Hodges, K. J. Klaaren, and S. J. LaFleur, *Introspecting about reasons can reduce post-choice satisfaction*, Personality and Social Psychology Bulletin **19** (1993), 331–339.
44. T. D. Wilson and J. W. Schooler, *Thinking too much: Introspection can reduce the quality of preferences and decisions*, Journal of Personality and Social Psychology **60** (1991), 181–192.