



PROMETHEE METODA

Petar Paradžik

Sadržaj

- Uvod
- Višekriterijski problem
- Višedimenzionalne preferencije
- Intenzitet preferencije
- Rangiranje
- Veza s Bordinom metodom
- Primjeri
- Literatura

Uvod

- Metoda PROMETHEE (**P**reference **R**anking **O**rganization **METH**od for **E**nrichment **E**valuations) spada u grupu metoda za višekriterijsko odlučivanje u skupu alternativa opisanih s više atributa.
- Postoje dvije osnovne verzije metode koje ćemo proučiti :
 - **PROMETHEE I** (djelomično rangiranje)
 - **PROMETHEE II** (potpuno rangiranje)
- Metodu je razvio Jean-Pierre Brans i prezentirao 1982 godine.
- Iste godine metoda je se počela primjenjivati na probleme vezane za zdravstvo!

Višekriterijski problem

- **Višekriterijski problem** se može formalizirati kao:

$\max \{ (f_1(a), \dots, f_k(a)) \mid a \in A \}$, gdje je

$A = \{ a_1, \dots, a_n \}$ konačan skup alternativa, a

f_i su vrijednosti po kriterijima.

- Od donositelja odluke očekujemo da identificira alternativu koja optimizira ‘sve’ kriterije.
- Rješenje višekriterijskog problema ne ovisi samo o vrijednostima kriterija, nego i o samom donositelju odluke.

PROMETHEE

- Primjenu metode PROMETHEE karakteriziraju tri koraka:
 - Konstrukcija fuzzy relacije za svaki kriterij f_i (preference modelling).
 - Konstrukcija globalne preferencije na skupu A (aggregation).
 - Konstrukcija poretka (exploitation).
- Sada nam je cilj detaljnije opisati pojedini korak.

(1) Preference modelling

- U prvom koraku donositelj odluke mora izabrati funkciju preferencije P_i , za svaku dimenziju (kriterij) f_i .
- **Funkcija preferencije** je neopadajuća funkcija takva da $P_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.
- Na temelju funkcije preferencije konstruiramo **fuzzy relaciju** preferencije $S_i : A \times A \rightarrow [0, 1]$ kao
$$S_i(a, b) = P_i(f_i(a) - f_i(b)) = P_i(d)$$
- $S_i(a, b)$ izražava intenzitet preferencije a nad preferencijom b .

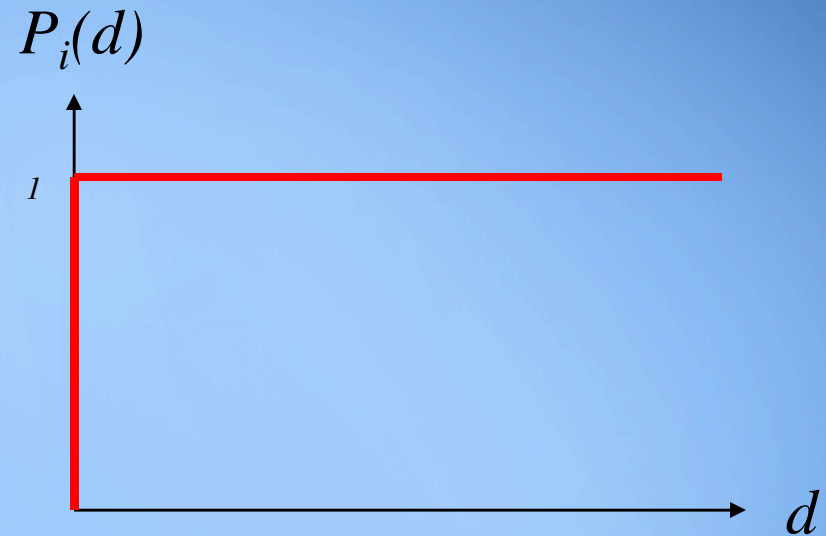
Preference modelling

$$S_i(a, b) = P_i(f_i(a) - f_i(b)) = P_i(d)$$

- Koristimo se sljedećom interpretacijom:
 - $S_i(a, b) = 0$ znači **indiferenciju** između a i b (nema preferencije a nad b).
 - $S_i(a, b) \approx 0$ znači **slabu preferenciju** a nad b .
 - $S_i(a, b) \approx 1$ znači **jaku preferenciju** a nad b .
 - $S_i(a, b) = 1$ znači **strogu preferenciju** a nad b .
- Kako izgleda funkcija P_i ?
- Postoji šest standardnih tipova (kriterija) funkcije P_i .

(1) Običan Kriterij (Usual Criterion)

- U ovom slučaju postoji indiferencija između alternativa a i b ako i samo ako je $f_i(a) = f_i(b)$.
- U suprotnom donositelj odluke ima strogu preferenciju za alternativu koja ima veću vrijednost.

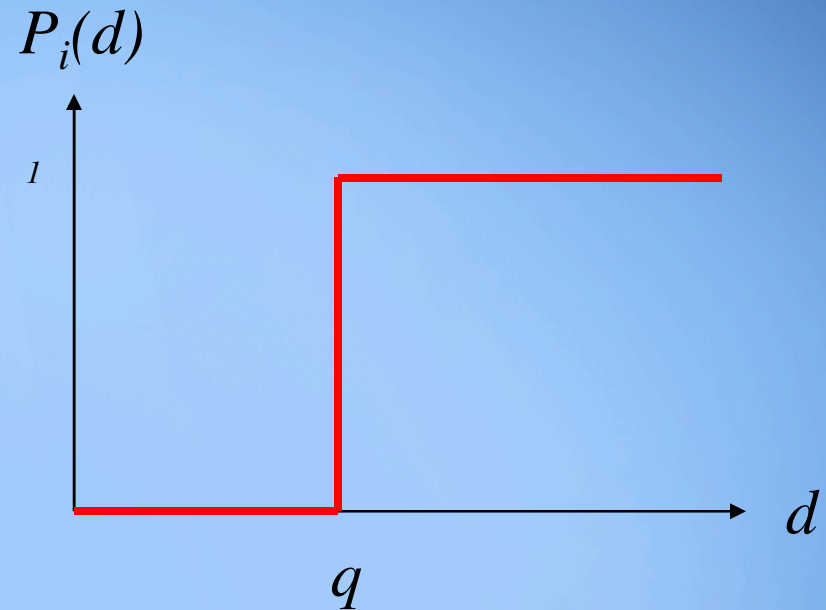


$$P_i(d) = \begin{cases} 0, & d = 0 \\ 1, & d \neq 0 \end{cases}$$

$$d = f_i(a) - f_i(b)$$

(2) Kvazi Kriterij (U-shape Criterion)

- Dvije alternative su za donositelja odluke indiferentne sve dok razlika njihovih vrijednosti ne prekorači prag d .
- Nakon toga, radi se o strogoj preferenciji.
- Donositelj odluke treba odrediti vrijednost parametra q .

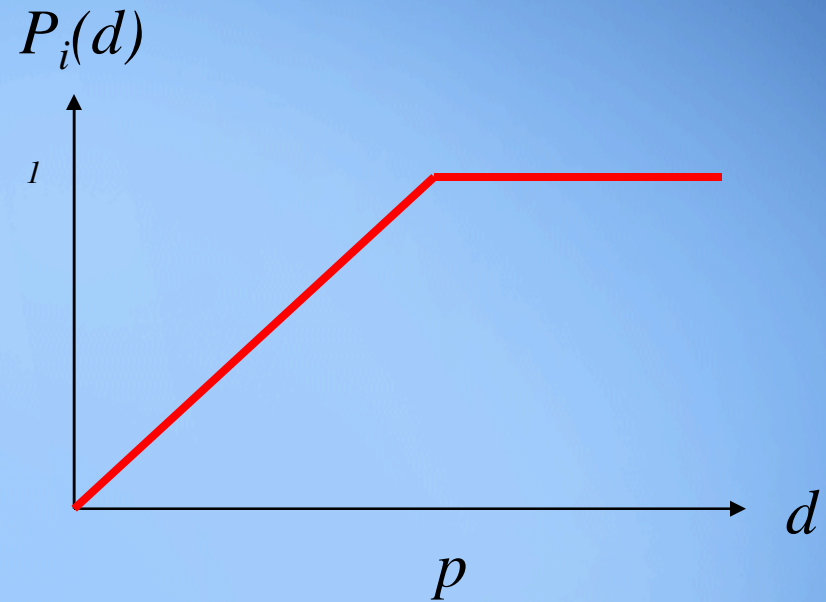


$$P_i(d) = \begin{cases} 0, & 0 \leq d \leq q \\ 1, & d > q \end{cases}$$

$$d = f_i(a) - f_i(b)$$

(3) Kriterij s linearnom preferencijom (V-shape Criterion)

- Sve dok je d manji od p preferencija donositelja odluke linearno raste s d , a kad d postane strogo veći od p nastaje situacija stroge preferencije.
- Donositelj odluke mora odrediti vrijednost parametra p .

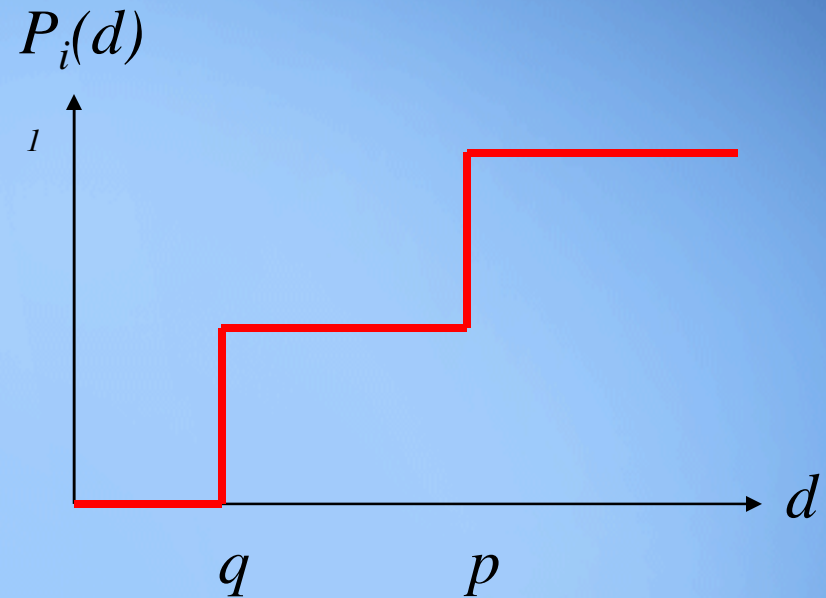


$$P_i(d) = \begin{cases} \frac{d}{p}, & 0 \leq d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$$

$$d = f_i(a) - f_i(b)$$

(4) Kriterij s razinama konstantne preferencije (Level Criterion)

- U ovom slučaju prag indiferencije q i prag slabe preferencije p su istovremeno definirani.
- Donositelj odluke mora odrediti vrijednost parametara p i q .

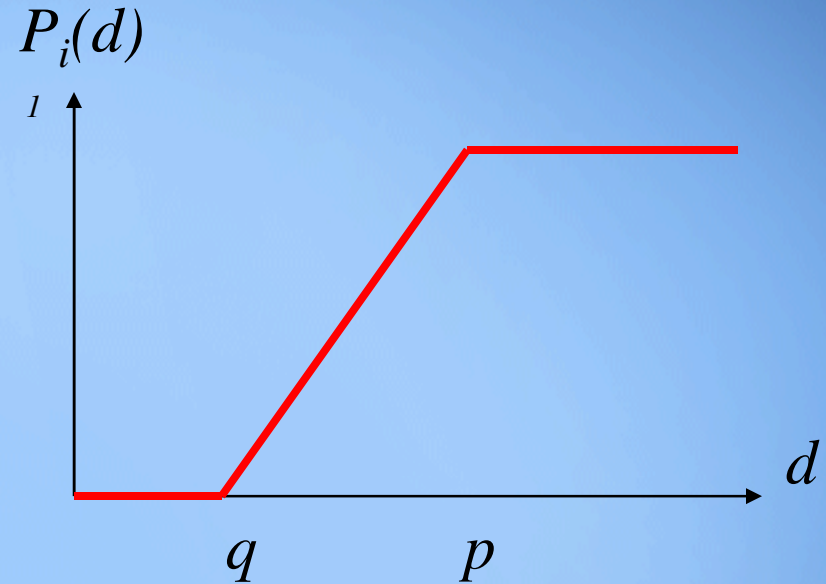


$$P_i(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ \frac{1}{2}, & q < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$$

$$d = f_i(a) - f_i(b)$$

(5) Kriterij s linearnom preferencijom i područijem indiferencije (V-shape with indifference Criterion)

- Donositelj odluke smatra da njegova preferencija odluke linearno raste između pragova q i p .
- Donositelj odluke mora odrediti vrijednost parametara p i q .

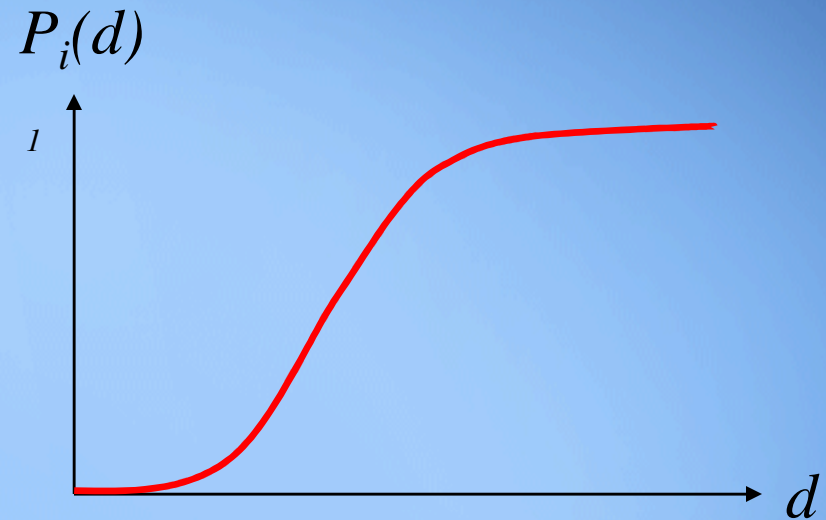


$$P_i(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ \frac{d-q}{p-q}, & q < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$$

$$d = f_i(a) - f_i(b)$$

(6) Gaussov Kriterij (Gaussian Criterion)

- Donositelj odluke smatra da njegova preferencija odluke ima izgled gaussove krivulje.
- Donositelj odluke mora odrediti vrijednost parametra σ .



$$P_i(d) = 1 - e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}}$$

$$d = f_i(a) - f_i(b)$$

(2) Aggregation

- Prepostavimo da je donositelj odluke uspješno proveo prvi korak, te da je dodatno odredio težine ω_i za svaki kriterij f_i .
- Težina ω_i je mjera relativne važnosti kriterija f_i , te vrijedi da je
$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$
- Sada konstruiramo **intenzitet preferencije** S kao:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n \omega_i S_i(a, b) \quad .$$

(2) Aggregation

- $S(a, b)$ predstavlja **globalni intenzitet** donositelja odluke da odabere alternativu a kad uzme u obzir **sve** kriterije:
 - $S(a, b) \approx 0$ označava **slabu preferenciju** a nad b za sve kriterije.
 - $S(a, b) \approx 1$ označava **jaku preferenciju** a nad b za sve kriterije.
- Prije nego što prijedemo na treći i posljednji korak, definiramo *ulazni i izlazni tok*.

Ulazni i izlazni tok

- Za svaku $a \in A$ definiramo *ulazni i izlazni tok*:

- **Ulazni tok** - $\Phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} S(a, x)$

- **Izlazni tok** - $\Phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} S(x, a)$

- Što je veći Φ^+ , to alternativa a više dominira nad ostalim alternativama u skupu alternativa A .
- Što je veći Φ^- , to ostale alternative više dominiraju nad alternativom a u skupu alternativa A .
- Na temelju ulaznog i izlaznog toka možemo izvršiti rangiranje odnosno poredak (treći korak) u PROMETHEE I i PROMETHEE II.

(3) Exploitation (PROMETHEE I)

- Sada konačno definiramo **globalnu relaciju preferencije** (\succ_I), **globalnu relaciju ekvivalencije** (\sim_I) i **relaciju neusporedivosti** (R_I) na sljedeći način:
 - $a \succ_I b$ akko $\Phi^+(a) > \Phi^+(b)$ i $\Phi^-(a) < \Phi^-(b)$
 - ili $\Phi^+(a) = \Phi^+(b)$ i $\Phi^-(a) < \Phi^-(b)$
 - ili $\Phi^+(a) > \Phi^+(b)$ i $\Phi^-(a) = \Phi^-(b)$
 - $a \sim_I b$ akko $\Phi^+(a) = \Phi^+(b)$ i $\Phi^-(a) = \Phi^-(b)$
 - $a R_I b$ akko $\Phi^+(a) > \Phi^+(b)$ i $\Phi^-(a) > \Phi^-(b)$
 - ili $\Phi^+(a) < \Phi^+(b)$ i $\Phi^-(a) < \Phi^-(b)$
- (\succ_I, \sim_I, R_I) se naziva **parcijalni poredak**.

(3) Exploitation (PROMETHEE II)

- Izvršavamo *potpuni poredak* u PROMETHEE II.
- U tu svrhu definiramo **tok** Φ kao:

$$\Phi(a) = \Phi^+(a) - \Phi^-(a)$$

- Definiramo **globalnu relaciju preferencije** (\succ_{II}) i **globalnu relaciju ekvivalencije** (\sim_{II}) kao:

- $a \succ_{II} b$ akko $\Phi(a) > \Phi(b)$

- $a \sim_{II} b$ akko $\Phi(a) = \Phi(b)$

- (\succ_{II}, \sim_{II}) se naziva **potpuni poredak**

PROMETHEE II

- Zapišimo Φ na malo drugačiji način:

$$\begin{aligned}\Phi(a) &= \Phi^+(a) - \Phi^-(a) \\ &= \sum_{x \in A} S(a, x) - \sum_{x \in A} S(x, a) \\ &= \sum_{x \in A} S(a, x) - \sum_{x \in A} S(x, a) \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{i=1}^n w_i S_i(a, x) - \sum_{x \in A} \sum_{i=1}^n w_i S_i(x, a) \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{i=1}^n w_i [S_i(a, x) - S_i(x, a)] \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \sum_{x \in A} [S_i(a, x) - S_i(x, a)] = \sum_{i=1}^n w_i \Phi_i(a)\end{aligned}$$

Generalizirana Bordina metoda

- Bordina metoda je predstavljena kao metoda kojom agregiramo **slabi uređaj** na temelju profila **linearnih uređaja**.
- Zapravo, Bordina metoda se može upotrijebiti za konstrukciju bilo koje binarne relacije pa i *fuzzy relacije* (PROMETHEE).
- Neka p profil fuzzy relacija, tj. $p = (S_1, \dots, S_n)$
- Definiramo $b_a(S_i)$ kao:

$$b_a(S_i) = \sum_{x \in A} S_i(a, x) - \sum_{x \in A} S_i(x, a)$$

- Dakle, što je veći $b_a(S_i)$ to je alternativa a bolja u f_i .

Generalizirana Bordina metoda

- Definiramo **Bordin uspjeh** alternative a kao:

$$B_a(p) = \sum_{i=1}^n b_a(S_i)$$

- Tada vrijedi: $a \geq_p b$ akko $B_a(p) \geq B_b(p)$
- Postoji pet aksioma koji opisuju Generaliziranu Bordinu metodu.
- Tri od tih pet su potpuno identični onima u standardnoj Bordinoj metodi.
- Dva su malo drugačija jer sada umjesto linearnog uređaja (Bordina metoda) imamo fuzzy relacije.

Generalizirana Bordina metoda

- **Aksiomi:**

- (**Slabi uređaj**) Globalna relacija preferencije je slaba.
- (**Generalizirana vjerodostojnost**) Ako imamo samo jedan kriterij i ako je S_1 linearan uređaj, tada je globalna relacija preferencije \geq_p jednaka relaciji preferencije S_1 .
- (**Generalizirana istovjetnost**) Za bilo koji par alternativa (a , b) neka je r_{ab} definirano kao:

$$r_{ab}(p) = \sum_{i=1}^n S_i(a, b)$$

Ako za svaki par (a , b) alternativa vrijedi $r_{ab}(p) = r_{ba}(p)$, tada su sve alternative ekvivalentne.

- (**Neutralnost**) Krajnji rezultat ne ovisi o 'vrijednosti' kriterija, nego samo o poziciji alternative u n međusobnih relacija.
- (**Konzistentnost**) Kao u standardnoj Bordinoj metodi...

Generalizirana Bordina (GBM) metoda i PROMETHEE II

- *Teorem (Marchant¹, 1996.)*

Neka je F skup fuzzy relacija. Pretpostavimo da želimo agregirati profil fuzzy relacija u F . Jedina funkcija agregacije (metoda) koja zadovoljava sve aksiome je Generalizirana Bordina metoda.

- Ovaj teorem izrazito važan ne samo za GBM, nego i za PROMETHEE II!
- Pokušajmo sada povezati GBM i PROMETHEE II.

¹Marchant, T., "Valued relations aggregation with the Borda method", *Journal of multi-criteria decision analysis*, 5, pp. 127-132 (1996).

Generalizirana Bordina (GBM) metoda i PROMETHEE II

- Promatrajmo slijedeće:

- $$\Phi(a) = \sum_{i=1}^n w_i \Phi_i(a) \quad (\text{PROMETHEE II})$$

- $$B_a(p) = \sum_{i=1}^n b_a(S_i) \quad (\text{GBM})$$

- Pažljivim promatranjem uvjerit ćemo se da nakon što su funkcije preferencije P_i odabrane, PROMETHEE II metoda nije ništa drugo nego 'otežirana' verzija GBM!
- Prethodni teorem nam stoga mnogo govori o PROMETHEE II.
- Ugrubo govoreći, u trenutku kada se donositelj odluke odluči za P_i i složio se sa aksiomima koji karakteriziraju GBM, on **mora** koristiti PROMETHEE II!

Generalizirana Bordina metoda (GBM) i PROMETHEE II

- Postoji samo jedan mali problem.
- U GBM nema težina, dok u PROMETHEE II ima.
- Može se pokazati da ako su težine w_i cijeli brojevi, tada dodjeljivanje težine w_i i -tom kriteriju je ekvivalentno uzimanju u obzir problema koji nema težine i u kojem je svaki kriterij i je uzet u obzir w_i puta.
- Broj kriterija u ovom slučaju nije više n , nego je jednak zbroju svih kriterija w_i .
- Ako težine nisu cijeli brojevi nego racionalni, tada oni mogu biti transformirani u cijele.

PRIMJER 1 (advokatska firma)

kriteriji, alternative	udaljenost (<i>min</i>)	klijenti (%)	opremljenost (A, B, C)	veličina (<i>m</i> ²)	najam (\$)
<i>a</i>	45	50	A	800	1850
<i>b</i>	25	80	B	700	1700
<i>c</i>	20	70	C	500	1500
<i>d</i>	25	85	A	950	1900
<i>e</i>	30	75	C	700	1750

- Cilj nam je odabrati alternativu koja optimizira sve kriterije.
- Napraviti ćemo nekoliko testiranja u kojima ćemo mijenjati težine kriterija kao i funkcije preferencije.

(1) TESTIRANJE

$$o.k.: P_i(d) = \begin{cases} 0, & d=0 \\ 1, & d \neq 0 \end{cases}$$

min/max	min	max	max	max	min
funkcija preferencije	obična	obična	obična	obična	obična
parametar q	-	-	-	-	-
parametar p	-	-	-	-	-
težina	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
kriteriji, alternative	udaljenost (min)	klijenti (%)	opremljenost (A, B, C)	veličina (m^2)	najam (\$)
a	45	50	A	800	1850
b	25	80	B	700	1700
c	20	70	C	500	1500
d	25	85	A	950	1900
e	30	75	C	700	1750

(1) TESTIRANJE

$S_i(a, b) = P_i(d)$	$f_i(a) - f_i(b) (=d)$	alternativa a $f_i(a)$	kriteriji	alternativa b $f_i(b)$	$f_i(b) - f_i(a) (=d)$	$S_i(b, a) = P_i(d)$
0	-	45	udaljenost	25	-20	1
0	-	50	klijenti	80	30	1
1	1	A	opremljenost	B	-	0
1	100	800	veličina	700	-	0
0	-	1850	najam	1700	-150	1

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n \omega_i S_i(a, b) = 0.2 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0 + 0.2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0 = 0.4$$

$$S(b, a) = \sum_{i=1}^n \omega_i S_i(b, a) = 0.2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0 + 0.2 \cdot 1 = 0.6$$

(1) TESTIRANJE

alternative	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	0	0.4			
<i>b</i>	0.6	0			
<i>c</i>			0		
<i>d</i>				0	
<i>e</i>					0

- Na taj način usporedimo sve alternative i popunimo gornju tablicu.

(1) TESTIRANJE

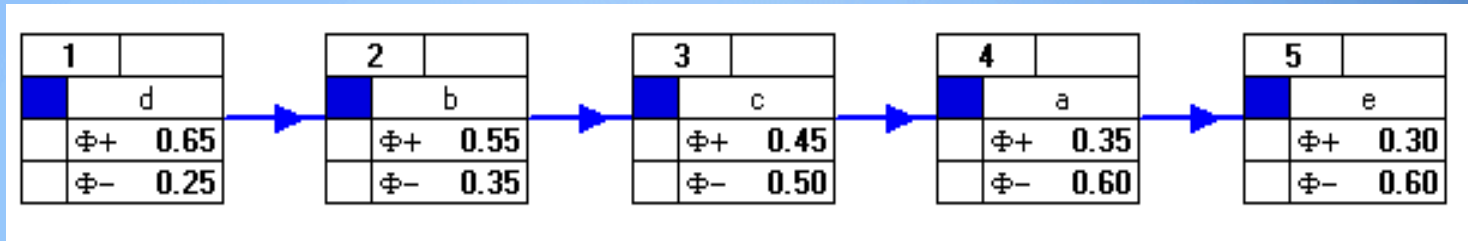
alternative	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	$\Phi^+(alt)$
<i>a</i>	0	0.4	0.4	0.2	0.4	0.35
<i>b</i>	0.6	0	0.6	0.2	0.8	0.55
<i>c</i>	0.6	0.4	0	0.4	0.4	0.45
<i>d</i>	0.6	0.6	0.6	0	0.8	0.65
<i>e</i>	0.6	0	0.4	0.2	0	0.3
$\Phi^-(alt)$	0.6	0.35	0.5	0.25	0.6	
$\Phi(alt)$	-0.25	0.2	-0.05	0.4	-0.3	

$$\Phi^+(alternative) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} S(a, x)$$

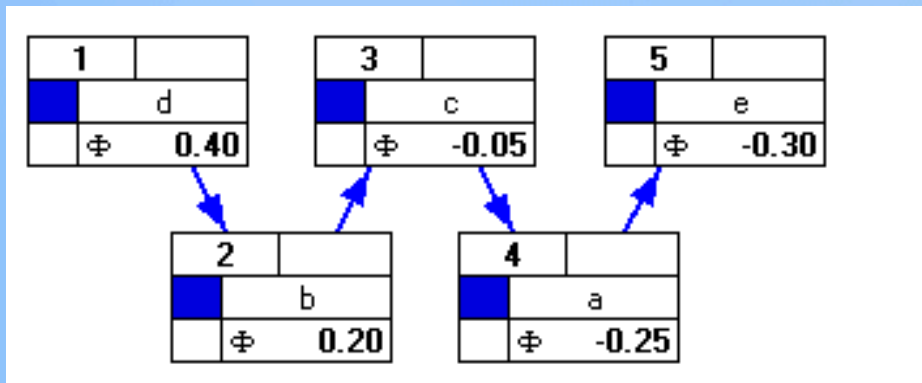
$$\Phi^-(alternative) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} S(x, a)$$

(1) TESTIRANJE

- PROMETHEE I (parcijalno rangiranje):



- PROMETHEE II (potpuno rangiranje):



(2) TESTIRANJE

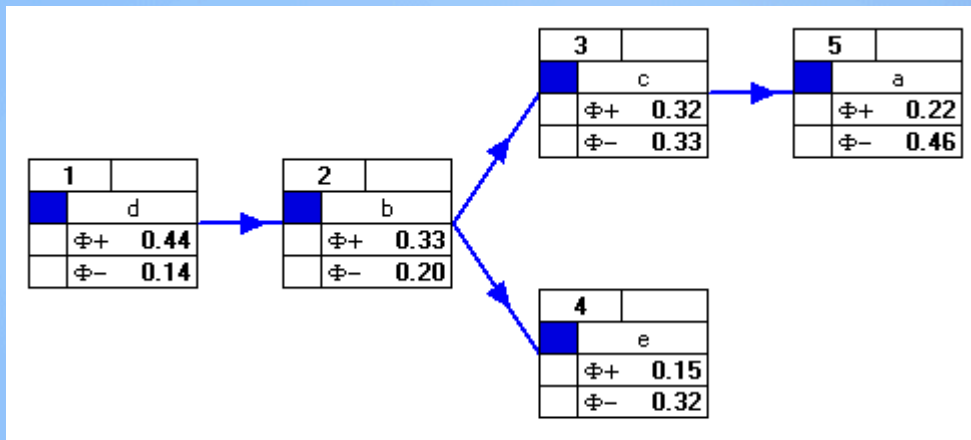
$$o: P_i(d) = \begin{cases} 0, & d = 0 \\ 1, & d \neq 0 \end{cases}$$

$$l: P_i(d) = \begin{cases} \frac{d}{p}, & 0 \leq d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$$

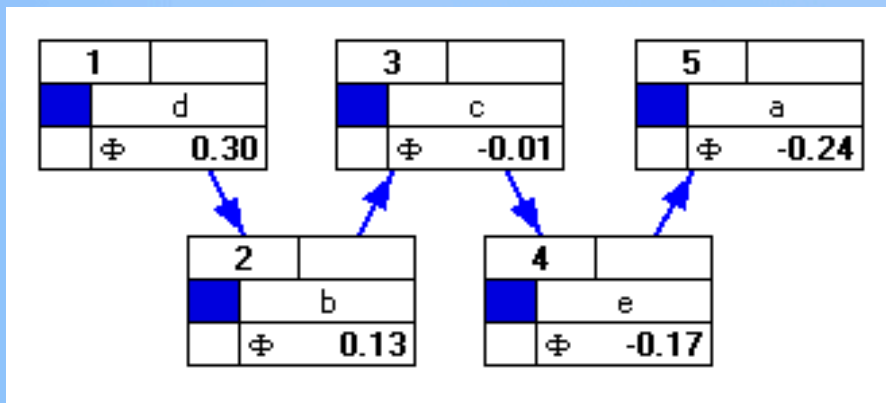
min/max	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>max</i>	<i>max</i>	<i>min</i>
funkcija preferencije	linearna	linearna	obična	linearna	linearna
parametar <i>q</i>	-	-	-	-	-
parametar <i>p</i>	20	35	-	400	256
težina	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
kriteriji, alternative	udaljenost (<i>min</i>)	klijenti (%)	opremljenost (A, B, C)	veličina (m^2)	najam (\$)
<i>a</i>	45	50	A	800	1850
<i>b</i>	25	80	B	700	1700
<i>c</i>	20	70	C	500	1500
<i>d</i>	25	85	A	950	1900
<i>e</i>	30	75	C	700	1750

(2) TESTIRANJE

- PROMETHEE I (parcijalno rangiranje):



- PROMETHEE II (potpuno rangiranje):



(3) TESTIRANJE

$$o: P_i(d) = \begin{cases} 0, & d = 0 \\ 1, & d \neq 0 \end{cases}$$

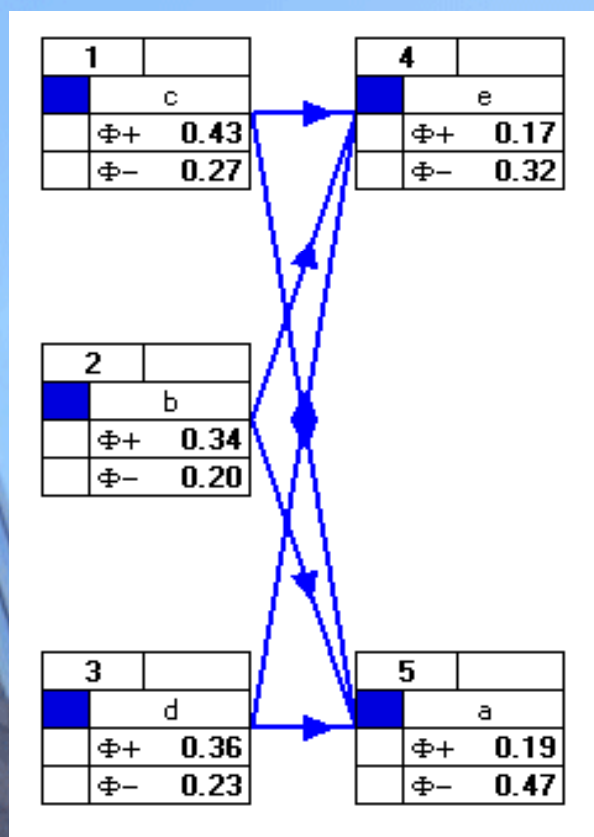
$$l: P_i(d) = \begin{cases} \frac{d}{p}, & 0 \leq d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases}$$

min/max	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>max</i>	<i>max</i>	<i>min</i>
funkcija preferencije	linearna	linearna	obična	linearna	linearna
parametar <i>q</i>	-	-	-	-	-
parametar <i>p</i>	20	35	-	400	256
težina	0.16	0.16	0.16	0.16	0.34
kriteriji, alternative	udaljenost (<i>min</i>)	klijenti (%)	opremljenost (A, B, C)	veličina (m ²)	najam (\$)
<i>a</i>	45	50	A	800	1850
<i>b</i>	25	80	B	700	1700
<i>c</i>	20	70	C	500	1500
<i>d</i>	25	85	A	950	1900
<i>e</i>	30	75	C	700	1750

(3) TESTIRANJE

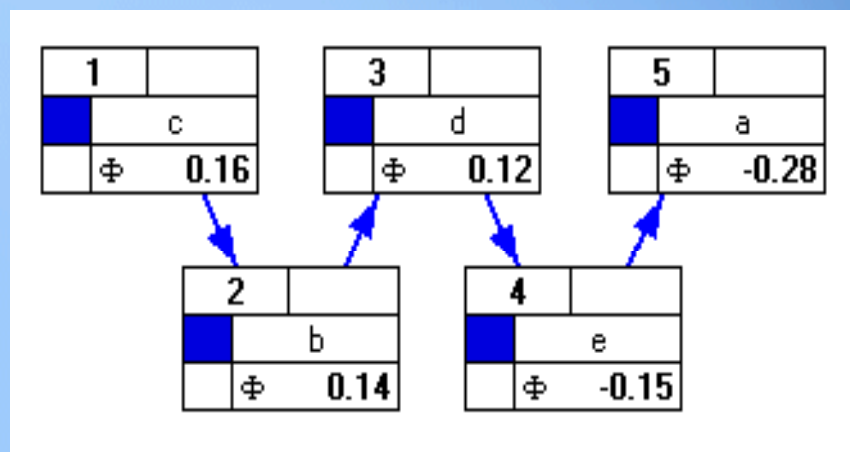
PROMETEE I

(parcijalno rangiranje)



PROMETEE II

(potpuno rangiranje)



PRIMJER 2 (odabir automobila)

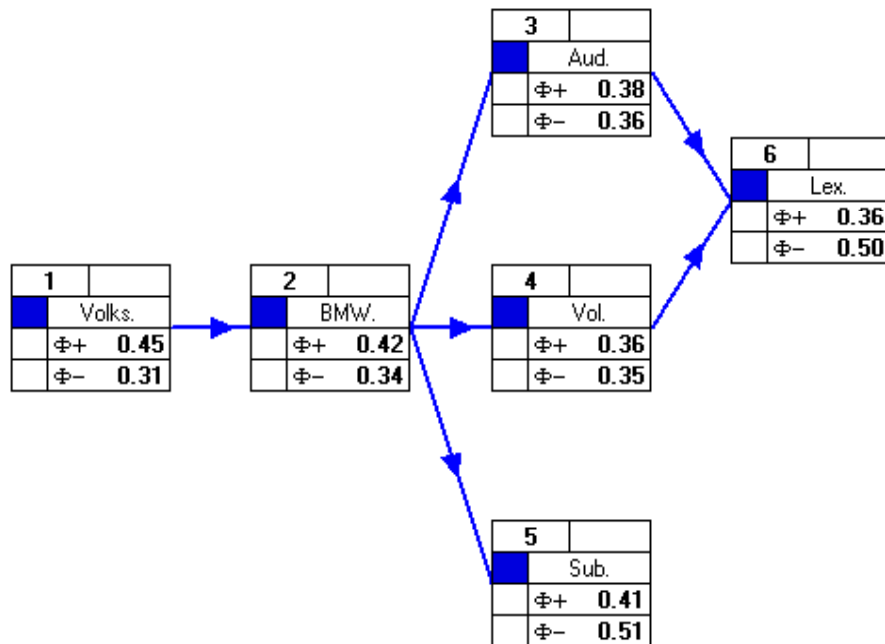
kriteriji, alternative	cijena (€)	snaga (ks)	potrošnja (prosjek)	ubrzanje (0-100)	max. brzina (km/h)
<i>Audi A4 2.0 TFSI</i>	38,581	180	6.6	7.9	236
<i>BMW 123D</i>	43,830	204	5.4	7.5	230
<i>Lexus IS 220D Base</i>	35,600	177	6.1	8.9	220
<i>Subaru Impreza 2.5i WRX</i>	42,644	230	10.4	6.5	209
<i>Volkswagen Passat CC 2.0 TSI</i>	36,589	200	7.9	7.6	237
<i>Volvo S80 2.5 T Kinetic</i>	43,000	231	8.6	7.7	235

min/max	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>min</i>	<i>min</i>	<i>max</i>
funkcija preferencije	gaussova	gaussova	linearna	linearna	linearna
parametar q	-	-	-	-	-
parametar p	-	-	1	1.5	20
<i>Gaussov σ</i>	1	2	-	-	-
težina	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
kriteriji, alternative	cijena (€)	snaga (ks)	potrošnja (prosjek)	ubrzanje (0-100)	max. brzina (km/h)
<i>Audi A4 2.0 TFSI</i>	38,581	180	6.6	7.9	236
<i>BMW 123D</i>	43,830	204	5.4	7.5	230
<i>Lexus IS 220D Base</i>	35,600	177	6.1	8.9	220
<i>Subaru Impreza 2.5i WRX</i>	42,644	230	10.4	6.5	209
<i>Volkswagen Passat CC 2.0 TSI</i>	36,589	200	7.9	7.6	237
<i>Volvo S80 2.5 T Kinetic</i>	43,000	231	8.6	7.7	235

(1) TESTIRANJE

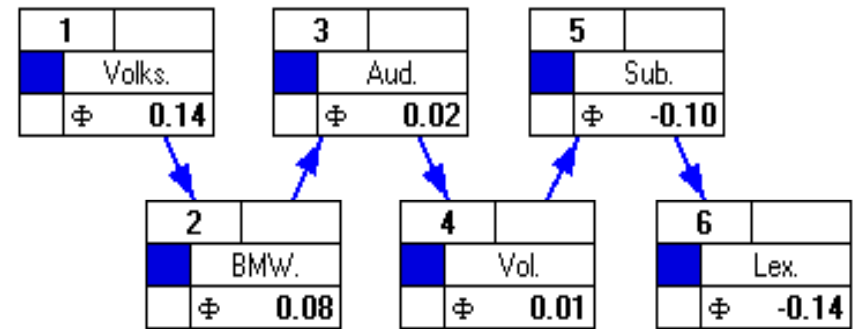
PROMETEE I

(parcijalno rangiranje)



PROMETEE II

(potpuno rangiranje)

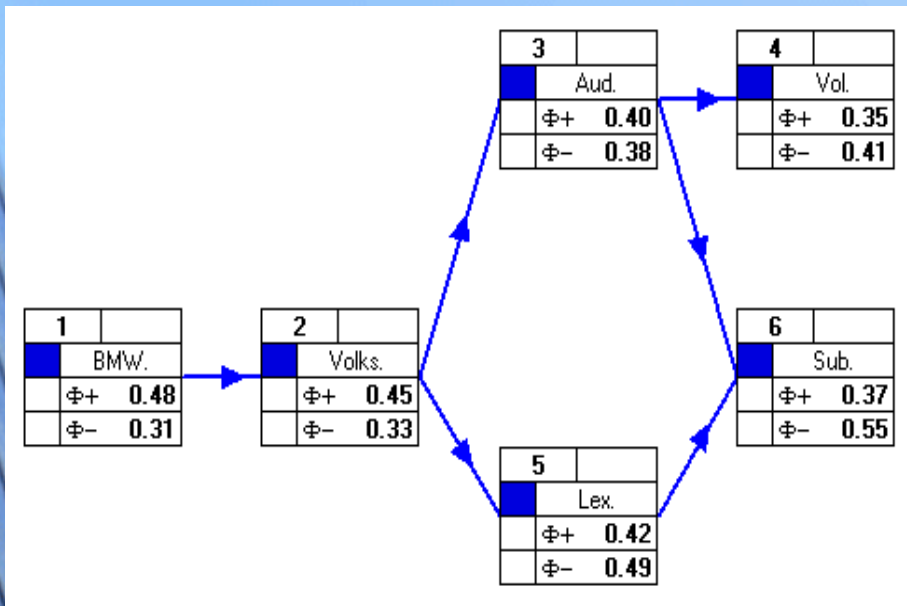


min/max	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>min</i>	<i>min</i>	<i>max</i>
funkcija preferencije	gaussova	gaussova	linearna	linearna	linearna
parametar q	-	-	-	-	-
parametar p	-	-	0.5	1.5	20
Gaussov σ	1	2	-	-	-
težina	0.18	0.18	0.27	0.18	0.18
kriteriji, alternative	cijena (€)	snaga (ks)	potrošnja (prosjek)	ubrzanje (0-100)	max. brzina (km/h)
Audi A4 2.0 TFSI	38,581	180	6.6	7.9	236
BMW 123D	43,830	204	5.4	7.5	230
Lexus IS 220D Base	35,600	177	6.1	8.9	220
Subaru Impreza 2.5i WRX	42,644	230	10.4	6.5	209
Volkswagen Passat CC 2.0 TSI	36,589	200	7.9	7.6	237
Volvo S80 2.5 T Kinetic	43,000	231	8.6	7.7	235

(2) TESTIRANJE

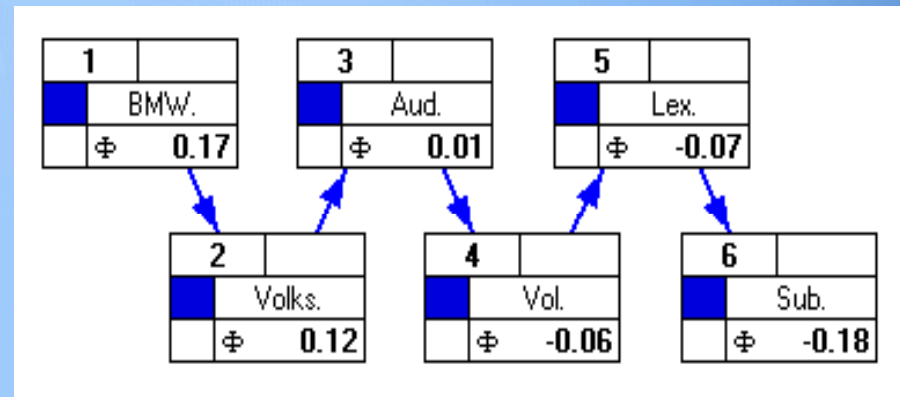
PROMETEE I

(parcijalno rangiranje)



PROMETEE II

(potpuno rangiranje)



SOFTWARE

- Prilikom rješavanja primjera korišten je sljedeći software:
 - Decision Lab 2000:
<http://www.visualdecision.com/dlab.htm>
 - Decision Sights: <http://www.decision-sights.com>

LITERATURA

- Bouyssou D., Marchant T., Pirlot M., Tsoukias A., Vincke P., *Evaluation and decision models with multiple criteria*, Springer, New York, 2006.
- <http://info.wlu.ca/~wwwmath/courses/graduatecourses/ma536/promethee.pdf>