Uvod u Teoriju Igara

Što su to igre?

Kad igramo neku igru, ključna je činjenica da odluke pojedinih igrača afektiraju ostale igrače. Iako naizgled jednostavna pretpostavka, iz nje proizlaze mnoga pitanja na koja igrači pokušavaju odgovoriti igrajući igru, odnosno tražeći strategije.

Neka od pitanja su:

- Koje pretpostavke o protivničkim potezima igrači imaju?
- Kako će koji protivnik igrati?
- Koje su posljedice nekog poteza? Kako one afektiraju cijelu grupu?

Teorija igara se bavi ovim i srodnim pitanjima.

Pogledajmo neke primjere međuovisnosti u stvarnom životu:

- Aukcije
- Glasanja/izbori
- Sukobi životinja
- Upotreba prirodnih izvora (onih koji se obnavljaju, poput šuma, i onih koji se ne obnavljaju, poput nafte)
- Bankroti kompanija
- Ulaganja u istraživanja i razvoj
- Priprema nastave

Čime se bavi teorija igara?

Teorija igara proučava slijedeće entitete:

- **grupa** – u svakoj igri postoji nekoliko donositelja odluke koje ćemo zvati **igrači**
- **interakcija** – svaka akcija koju napravi jedan igrač, nužno mora afektirati barem jedog od ostalih igrača
- **strategija** – igrači računaju s interakcijom prilikom donošenja odluka, stvarajući plan igranja, tj. strategiju

- **razum –** svaki igrabira najbolju moguću akciju

Pogledajmo neke primjere pojave tih pojmova u igrama.

Primjeri iz svakodnevnog života

Primjer 1: Zajednička izrada znanstvenog rada ili zadaće

Grupa studenata treba izraditi zajednički rad. Njihova *interakcija* se sastoji u tome da svako izbjegavanje posla od strane jednog pojedinca, dovodi do prekovremenog rada jednog ili više ostalih studenata.

Strategija zahtijeva procjenu vjerojatnosti pojave zabušanata u grupi, dok *razumna* igra iziskuje pažljivo vaganje između dobivene ocjene i uloženog truda.

Primjer 2: Nasumično testiranje na doping (npr. na Olimpijskim igrama)

Grupu čine međusobno kompetitivni igrači i Međunarodni olimpijski odbor (International Olympic Committee, IOC). *Interakcija* se pojavljuje i između igrača (koji odučuju o treningu i o eventualnom dopingiranju) i s IOC-om (kojem je cilj održati reputaciju sporta).

Razumna strategija kod igrača znači donošenje odluka u ovisnosti o vjerojatnosti pobjede (npr. preuzimanje manjeg ili većeg rizika pri nekim potezima), kao i procjenu šanse da ih IOC uhvati ako se odluče dopingirati. Slično, IOC mora odlučiti o načinima testiranja i kaznama, ovisno o cijeni testiranja i vrijednosti čiste reputacije.

Primjeri iz ekonomije i financija

Primjer 3: Istraživanje i razvoj kod farmaceutskih kompanija

Prema nekim procjenama, američke farmaceutske kompanije troše oko 20% profita na istraživanja i razvoj. Cijena razvoja prosječnog lijeka se procjenjuje na 350 milijuna dolara. Očito, kompanije su jako zainteresirane u odlučivanju u koje linije proizvoda treba ulagati, kolike cijene zadati za pojedine lijekove, kako smanjiti razne rizike vezane uz nove lijekove i sl.

Grupa je ovdje skup farmaceutskih kompanija, *interakcija* proizlazi iz činjenice da najbolju zaradu na nekom lijeku ima kompanija koja ga prva proizvede (i patentira), a *razumna strategija* je potrebna da bi se maksimizirali profiti, uzevši u obzir angažman suparnika prilikom izrad istog lijeka.

Primjer 4: Aukcije

S vremena na vrijeme, United States Treasury stavlja na aukciju obveznice američke vlade. U aukciji se natječu velike banke koje zatim preprodaju obveznice svojim klijentima.

S obzirom da se ulagači rijetko mijenjaju, *grupu* čine zainteresirane banke, dok *interakcija*, očito, proizlazi iz činjenice da se bore za iste obveznice, te jedni drugima smanjuju profite podizanjem ponuđene cijene. *Razumna strategija* je ona koja pronalazi balans između preskupog kupovanja obveznica i neuspjeha pri njihovoj kupnji.

Primjeri iz biologije i zakonodavstva

Primjer 5: Ponašanje životinja

Životinje se većinom povode za instinktima, što isključuje "šum", odnosno razne faktore koji smanjuju racionalnost odluka (emocije, korupciju i sl), pa je teorija igara našla široku primjenu u proučavanju sukoba i natjecanja kod životinja. Životinje se često bore za za ženke, plijen, teritorij i sl. To su resursi koje se isplati otkriti prije ostalih ili ukrasti od onih koji su bili brži u otkrivanju resursa.

Grupu čine životinje zainteresirane za isti "plijen", dok *interakcija* proizlazi iz ograničenosti resursa. *Strategija* se sastoji u uzimanju u obzir ponašanje konkurenata, dok *razum* vodi zadovoljavanju kratkoročnih ili dugoročnih potreba (npr glad, odnosno produljenje vrste).

Primjer 6: Zakoni o bankrotu

Prema zakonima većine zapadnih država, kad kompanija proglasi bankrot, njena imovina postaje nedostupna kreditorima (i samoj kompaniji) dok se svi ne dogovore oko podjele te imovine. No, prije objave bankrota, kreditori mogu sudski utjerivati dugove, no to može dovesti do bankrota koji bi se inače možda mogao izbjeći.

Ovo je tipičan primjer *interakcije* unutar *grupe* kreditora koja potječe od jednostavne činjenice da novac koji "uhvati" jedan kreditor, postaje nedostupan ostalima. *Strategija* se sastoji u procjenjivanju strpljivosti ostalih kreditora, a *razumni* izbor uključuje "vaganje" između ranog izvlačenja sredstava iz kompanije i izazivanja nepotrebnog bankrota.

Čime se Teorija Igara <u>ne</u> bavi?

Prema navedenim primjerima, mogli bismo zaključiti da je sve u životu igra. Iako bi se s time složili mnogi filozofi, komičari i slični, u terminologiji Teorije Igara, slijedeće situacije <u>nisu</u> igre:

- **jednostrana odluka** – u slučaju da odluke afektiraju samo onoga tko ih donosi, nema interakcije, pa nije riječ o igri.

Tipični primjeri su odluke o odlasku u kino, izbor restorana i slično

- **preveliki utjecaj –** odluke koje afektiraju preveliki broj entiteta (ljudi, kompanija i sl). Tipični primjeri su reguliranje cijena od strane velikih (često monopolističkih) kompanija, kupnje dionica multinacionalnih kompanija i sl.
  Kod ovakvih problema, jednostavno je neizvedivo voditi računa o svim igračima, vezama i posljedicama pojedinih akcija.

Neki primjeri igara

Nim/Marienbad

Igra, koju igraju dva igrača, počinje s dvije hrpe šibica. Igrači igraju naizmjence, a svaki uzima proizvoljan broj šibica (mora uzeti barem jednu) s jedne od hrpa (koju sam bira).

U Nimu, pobjednik je igrač koji uzme zadnju šibicu. U Marienbadu, takav igrač gubi.

Postoji li pobjednička strategija za ove igre? Drugim riječima, postoji li strategija koja će nekog igrača dovesti do pobjede, bez obzira na to kako igra njegov protivnik?

Analiza Nima. Proglasimo hrpe *ujednačenima* ako imaju jednak broj šibica, a *neujednačenima* ako nemaju. Ako se na prvoj hrpi nalazi m, a na drugoj n šibica, situaciju ćemo označavati s (m, n).

Pretpostavimo da se nalazimo u situaciji (1,1) i da je prvi igrač na potezu. Očito, on može uzeti točno jednu šibicu i to svejedno s koje hrpe. Drugi igrač će uzeti preostalu šibicu i time će pobijediti.

Neka je zadan prirodni broj m. Pretpostavimo da za svaki $n < m$ vrijedi da drugi igrač može pobijediti u situaciji (n, n) ako je na potezu prvi igrač, i to tako da održava hrpe ujednačenima. Drugim riječima, koliko šibica prvi igrač uzme s jedne hrpe, toliko drugi igrač uzme s druge.

Ako se nalazimo u situaciji (m, m) onda prvi igrač uzima $k < m$ šibica (ako uzme m, očito gubi) s neke hrpe (npr. prve) što dovodi do situacije $(m - k, m)$. Drugi igrač će, prema strategiji, uzeti k šibica s druge hrpe i tako će dovesti do situacije $(m - k, m - k)$, koja je prema pretpostavci indukcije za njega pobjedonosna.

Dakle, ako su hrpe na početku ujednačene, drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

Krenemo li od neujednačenih hrpa, prvi igrač ih može ujednačiti. No, time dolazimo u situaciju u kojoj su hrpe ujednačene, a drugi igrač je prvi na potezu. Dakle, igra u tom slučaju ima pobjedničku strategiju (opet ujednačavanje hrpa) za prvog igrača.

Pitanja: Postoje li druge pobjedničke strategije? Što se događa ako imamo više od jedne hrpe?

Odgovor na prvo pitanje je jednostavan: ne postoje, jer pobjedničku strategiju ima svaki igrač na čijem potezu su neujednačene hrpe. Ako "razbije" gore opisanu strategiju, tj. odigra tako da ne ujednači hrpe, drugi će dobiti situaciju s neujednačenim hrpama, pa će imati pobjedničku strategiju (dakle, onaj prvi gubi).

Odgovor na drugo pitanje je složeniji, a uključuje prikaz broja šibica u hrpama preko binarnih brojeva.

Marienbad. Sličnu analizu možemo provesti i za ovu igru.

Primijetimo da igra nije "simetrična" u odnosu na Nim, u smislu da ne možemo samo zamijeniti riječi "ujednačen" i "neujednačen" da bismo dobili pobjedničku strategiju.

Na primjer, igra koja počinje situacijom (1,1) prvi igrač ima pobjedničku strategiju (dapače, nužno pobjeđuje), dok u situaciji (2,2) drugi igrač ima pobjedničku strategiju (ako prvi uzme jednu šibicu, drugi "počisti" netaknutu hrpu, a ako prvi "počisti" cijelu hrpu, drugi s preostale hrpe uzme jednu šibicu). Dapače, svaka igra koja počinje situacijom (m, m) za $m > 1$ ima pobjedničku strategiju za drugog igrača. Sličnim argumentom kao kod Nima, igra koja počinje nebalansiranim hrpama ima pobjedničku strategiju za prvog igrača.

Zadatak: Analizirajte igru Marienbad i dokažite tvrdnje iz prethodnog paragrafa.

Zatvorska dilema

Dva osumnječinaka, Pero (P) i Miroslav (M) su pritvorena u odvojenim ćelijama. Svaki ima dvije mogućnosti: priznati ili ne priznati zločin. Ako oba priznaju, dobijaju po 5 godina zatvora. Ako jedan prizna, odlazi slobodan i svjedoči protiv drugog koji dobije 15 godina zatvora. Ako ni jedan ne prizna, oba dobijaju kaznu od godinu dana za neki manji prekršaj (nešto kao Al Capone za utaju poreza). Igru možemo prikazati priloženom tablicom.

		M	
		Ne priznaje	Priznaje
P	Ne priznaje	1, 1	15, 0
	Priznaje	0, 15	5, 5

Analiza. Gledano u globalu, najisplativije im je ne priznati. No, Pero razmišlja ovako: *Ako ja ne priznam, a Miroslav prizna, odgulit ću 15 godina umjesto samo jedne. Ako odlučim priznati onda se mogu izvući ili, ako Miroslav prizna, dobiti samo 5 godina. U* *oba slučaja, bolje mi je priznati.*

No, na sličan način razmišlja i Miroslav, pa dolazimo do zaključka da će obojica priznati zločin.

Primijetimo dvije bitne novosti:

1. Ovo nije strogo kompetitivna igra, tj. postoji strategija kojom oba igrača dobijaju (ako ni jedan ne prizna).
2. Postoje mnogi primjeri ovakve igre u stvarnom životu.
   Na primjer, utrka dvije države u naoružavanju: obje bi rado uštedjele novac i uložile ga u nešto drugo, no ni jedna ne želi da ona druga dobije stratešku prednost. Na kraju obje troše puno novca na naoružanje, što ih opet dovodi u istu pat-poziciju u kojoj bi bile i da se nisu naoružavale.
   Drugi primjer je sukob oko imovine (npr. prilikom razvoda braka ili oko nasljedstva). Ako se stranke dogovore, dobijaju podjednaku vrijednost. No, ako se netko na sudu pojavi s odvjetnikom, dobit će stratešku prednost i samim tim puno veći dio vrijednosti koju pokušavaju podijeliti. Zato je za očekivati da će obje strane dovesti odvjetnika, što će ih opet vratiti u ravnopravan položaj, ali će (zbog troškova) na kraju dijeliti mnogo manju imovinu.

Zaključak

1. Teorija igara se bavi proučavanjem međuovisnosti, preciznije *interakcije* unutar *grupe* igrača koji donose *racionalne* odluke bazirane na *strateškoj* analizi poteza koje bi mogli odigrati ostali članovi grupe.
2. Primjena Teorije igara je široka: od raspodjele resursa, do glasanja; od ponašanja životinja, do strategije razvoja raznih kompanija
3. Strateška analiza Nima i Zatvorske dileme pokazuju primjere traženja pobjedničkih strategija za pojedine igrače. Te strategije ne moraju biti optimalne i za grupu u cjelini.