Primjeri Nashovog equilibriuma

Dominantne strategije

Primjer 1: Zatvorska dilema. Dva osumnjičenika, Pero (P) i Miroslav (M), su pritvoreni u odvojenim ćelijama. Svaki ima dvije mogućnosti: priznati ili ne priznati zločin. Ako oba priznaju, dobijaju po 5 godina zatvora. Ako jedan prizna, odlazi slobodan i svjedoči protiv drugog koji dobije 15 godina zatvora. Ako ni jedan ne prizna, oba dobijaju kaznu od godinu dana za neki manji prekršaj (nešto kao Al Capone za utaju poreza). Igru možemo prikazati priloženom tablicom.

		M	
		Ne priznaje	Priznaje
P	Ne priznaje	1, 1	15, 0
	Priznaje	0, 15	5, 5

Kako je riječ o godinama provedenim u zatvoru, ovdje smo očito popisali gubitke, a ne profite. U nastavku, pod "optimum" smatramo "minimum". Alternativno, mogli smo samo vrijednosti u tablici pomnožiti s -1.

Na prošlim vježbama smo primijetili da Pero razmišlja ovako: *Ako ja ne priznam, a Miroslav prizna, odgulit ću 15 godina umjesto samo jedne. Ako odlučim priznati onda se mogu izvući ili, ako Miroslav prizna, dobiti samo 5 godina. U oba slučaja, bolje mi je priznati.* Na sličan način razmišlja i Miroslav.

Takvo razmišljanje pokazuje da je za Peru, **neovisno o Miroslavovoj odluci**, bolje priznati. To znači da je za njega strategija "priznati" dominantna strategiji "ne priznati". Drugim riječima, Pero neće strategiju "priznati" uopće uzimati u obzir. Time igru svodimo na igru s priložene tablice.

		M	
		Ne priznaje	Priznaje
P	Priznaje	0, 15	5, 5

No, sada je Miroslavova odluka jednostavna: njemu se također više isplati priznati. Time smo došli do jedinstvene strategije koju će odigrati oba igrača: obojica priznaju.

Postupak smo mogli započeti i s Miroslavom. Također, postupak možemo ponavljati dok god jedan od igrača ima dominantnu strategiju. Dobivena reducirana igra će biti ista, neovisno o redoslijedu izvođenja eliminacija (osim u slučaju kad su dvije strategije za nekog igrača jednake).

Opisani postupak zovemo **eliminacija dominiranih strategija** i on predstavlja prvi korak u rješavanju mnogih matričnih igara,

Nashov equilibrium

Nashov equilibrium za čiste strategije. Neka je dana igra s n igrača. Igrač k ima na raspolaganju akcije $(a_i^k)_{i=1}^{m_k}$. Profiti koje igrači dobijaju u pojedinim situacijama dani su funkcijom $f: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gdje je $A_k := \{a_i^k : i = 1, 2, \ldots, m_k\}$ skup poteza koje igrač *k* može odigrati. Izbor poteza $(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \ldots, a_{i_n}^n)$ zovemo **Nashov equilibrium** (ili **ravnotežno stanje**) **za čiste strategije** ako se ni jednom od igrača ne isplati promijeniti svoj izbor, uz uvjet da ga ne promijene ni ostali igrači, tj. ako vrijedi:

$$f(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \ldots, a_{i_n}^n)_k = \max_{j=1}^{m_k} f(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \ldots, a_j^k, \ldots, a_{i_n}^n)_k$$

Primjer 2: BoS. Naziva se *Bach or Stravinsky* ili *Battle of Sexes*. Dvoje ljudi idu na koncert. Apsolutno im je važno da idu zajedno, no jedno preferira Bacha, a drugo Stravinskog. Njihove preference možemo izraziti tablicom:

	Bach	*Stravinsky*
Bach	**2, 1**	0, 0
Stravinsky	0, 0	**1, 2**

Imamo dva ravnotežna stanja: (Bach, Bach) i (Stravinsky, Stravinsky).

Primjer 3: Koordinirana igra. Slično kao kod BoS-a, samo što su preference oba igrača jednake:

	Mozart	*Mahler*
Mozart	**2, 2**	0, 0
Mahler	0, 0	**1, 1**

Opet imamo dva ravnotežna stanja: (Mozart, Mozart) i (Mahler, Mahler). No, za razliku od BoS-a, ovdje su preference igrača jednake, pa postoji "bolje" ravnotežno stanje ("bolje" za oba igrača). Ipak, Nashov equilibrium ne govori ništa na temu "bolje" strategije – on određuje samo ravnotežna stanja i ne pravi razliku među njima.

Primjer 1: Zatvorska dilema. Vratimo se na zatvorsku dilemu.

		M	
		Ne priznaje	Priznaje
P	Ne priznaje	1, 1	15, 0
	Priznaje	0, 15	5, 5

Ovo je tip igre gdje bi kooperacija bila idealna (globalno gledano, najbolje prolaze ako ništa ne priznaju), ali se potiče kompetitivnost. Što god jedan od igrača izabrao, drugom se više isplati priznati nego ne priznati, pa imamo jedinstveno ravnotežno stanje: (Priznaje, Priznaje).

Dakle, Nashov equilibrium nam, u stvari, govori o situacijama u kojima očekujemo "stabilnost", tj. da se ni jedan od igrača neće predomisliti.

Primijetimo da se dobiveno ravnotežno stanje u potpunosti podudara s rješenjem koje smo dobili eliminacijom dominiranih strategija.

Primjer 4: Sokol i grlica. Dvije životinje se bore oko plijena. Svaka se može ponašati kao sokol (napadački) ili kao grlica (povučeno). Procjene dobiti dane su tablicom:

	Sokol	*Grlica*
Sokol	0, 0	**4, 1**
Grlica	**1, 4**	3, 3

Za svaku životinju je idealno da bude sokol, a njen protivnik grlica. Najgore prolaze ako se obje ponašaju kao sokoli (pobiju se i nitko ne dobije ništa). Očito, svaka životinja preferira biti grlica ako je ona druga sokol.

Ravnotežna stanja su ona u kojima se igrači ponašaju različito: (Grlica, Sokol) i (Sokol, Grlica).

Primjer 5: Pismo-glava. Dva igrača biraju pismo ili glavu. Ako izaberu isto, prvi plaća drugom \$1. Ako izaberu različito, onda drugi plaća prvom (isto \$1). Dobiti su dane tablicom:

	Pismo	*Glava*
Pismo	-1, 1	1, -1
Glava	1, -1	-1, 1

Za ovakvu igru, u kojoj su interesi igrača skroz suprotni, kažemo da je **strogo kompetitivna**, odnosno **igra sume nula**.

Ova igra nema ravnotežnih stanja.

Naravno, teorija strategijskih igara se bavi bitno složenijim problemima. Razmotrimo sada nekoliko tri primjera koji prikazuju najistraženije složene tipove igara.

Primjer 6: Aukcija. Neki objekt treba dati igraču iz skupa $\{1,\ldots,n\}$ u zamjenu za novac (ili, općenito, neko platežno sredstvo). Vrijednost objekta u očima igrača i je v_i i vrijedi $v_1>v_2>v_3>\cdots>v_n>0$. Mehanizam izbora je "zatvorena" aukcija: igrači simultano daju svoje ponude (nenegativne vrijednosti), ne znajući koliko su drugi ponudili. Pobjednik je igrač s najmanjim indeksom, od onih koji su najviše ponudili. Koliko pobjednik treba platiti objekt?

Postoje dvije mogućnosti. Razmotrimo prvo tzv. ***"first price"*** aukciju: pobjednik plaća koliko je ponudio. Kako bi izgledala igra koja modelira ovaj problem? Koja su ravnotežno stanja?

Jednu situaciju u ovakvoj igri možemo opisati n-torkom:

$$(x_1, x_{2,}\ldots, x_n) \text{ gdje je: } 0<x_k\le v_k \,\forall\, k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

Isplativost, označimo ju s $(p_1, p_{2,}\cdots, p_n)$, dobijemo tako da ponudu (tj. iznos koji pobjednik plaća) oduzmemo od vrijednosti objekta u očima kupca. Dakle, ako su igrači dali ponude $(x_1, x_{2,} \dots, x_n)$ i ako je *k* takav da vrijedi $x_k = max_{i=1}^n x_i$ onda je:

$$p_j = \begin{cases} v_j - x_j, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Koja su sada ravnotežna stanja?

Primijetimo: $i < j \Rightarrow v_i > v_j \Rightarrow \left(v_i - x_i < v_j - x_j \Leftrightarrow x_i > \left(v_i - v_j \right) + x_j \right)$

Dakle, jedini način da neki igrač (osim, naravno, prvog) ima veći profit od prvog, je taj da ponudi manje (i to barem za $v_i - v_j > 0$ novčanih jedinica). No, tada neće pobijediti, pa će imati profit 0. Drugim riječima, u ovakvoj aukciji, prvi igrač nužno ima najveći profit.

Zbog toga prvi, u slučaju poraza, igrač može "popraviti" svoju dobit tako da ponudi više od pobjednika. Time bi njegov profit bio veći od nule koju bi dobio kad bi netko drugi pobijedio.

Drugim riječima, u ravnotežnom stanju nužno mora pobijediti prvi igrač (tj. onaj kojem je objekt najvrjedniji).

S druge strane, ako prvi igrač ponudi manje nego što predmet vrijedi drugom igraču i svejedno pobijedi, onda je drugi igrač mogao "poboljšati" svoj profit tako da ponudi više od prvog igrača.

Također, ako prvi igrač ponudi više nego što predmet vrijedi drugom igraču, on može "popraviti" svoj profit tako da smanji ponudu (je će drugi igrač ponuditi najviše onoliko koliko njemu taj predmet vrijedi).

Dakle, jedina ravnotežna stanja su ona u kojima prvi igrač ponudi onoliko koliko predmet vrijedi drugom igraču.

Primijetimo još da ova igra favorizira prvog igrača, u smislu da u "neriješenim" situacijama predmet odlazi njemu. Što bi bilo kad bi se predmet, u slučaju da više igrača ponudi najveću svotu, nekim slučajnim postupkom prodavao jednom od njih?

Druga mogućnost naplate objekta pobjedniku je tzv. **"*second price*"** aukcija: pobjednik plaća koliko je najveća ponuda među onima koji nisu pobijedili. Zašto "*second*"? Ako je pobjednik jedini dao najveću ponudu, onda će platiti onoliko koliko je bila velika druga najveća ponuda.

Zadatak: Kako bi izgledala igra koja modelira ovaj problem? Koja su ravnotežna stanja?

Ovdje je optimalna strategija za nekog igrača da ponudi točno onoliko koliko predmet njemu vrijedi (objasnite zašto!).

Primijetimo da je ta strategija neovisna o vrijednostima predmeta za ostale igrače, tj. ona ostaje dominantna čak i ako igrači ne znaju vrijednost predmeta u očima svojih suparnika.

Primjer 7: Sukob uz trošenje. Dva igrača se bore za jedan objekt. Vrijednost objekta u očima igrača i je v_i. Definiramo i vrijeme kao varijablu koja kreće od nule i kontinuirano raste u beskonačnost. U onom trenutku kad jedan igrač prepusti objekt drugom, drugi dobija objekt. Ako to učine u istom trenutku, svaki dobija pola objekta i, naravno, pola vrijednosti tog objekta: igrač i dobije $\frac{v_i}{2}$.

Vrijednost objekta pada (linearno) s vremenom.

Definirajte igru za ovaj problem. Koja su ravnotežna stanja?

E sad, ja sam to ovako raspisao, ali u knjizi tvrde da su sva ravnotežna stanja ona u kojima netko odmah odustane.

Možemo pretpostaviti da je $v_1 < v_2$ i da je vrijednost predmeta u trenutku t za igrača i jednaka $v_i - t$. Očito svaki igrač može stati prije nego za njega vrijednost predmeta padne na nulu, točno u tom trenutku ili nakon tog trenutka. Naravno, svako čekanje nakon što vrijednost objekta padne na nulu može donijeti samo gubitke, pa tu mogućnost nećemo razmatrati (u skladu s principom razume igre u Teoriji igara).

Pretpostavimo da su igrači odlučili odustati u trenutku (t_1, t_2). Imamo slijedeće mogućnosti:

- $t_1 > t_2$ – drugi igrač je dobio 0. Primijetimo da zbog $v_1 < v_2$ vrijedi i $0 \le v_1 - t_2 < v_2 - t_2$ pa drugi igrač može poboljšati svoj rezultat tako da čeka dulje. Dakle, ovakva stanja nisu ravnotežna
- $t_1 = t_2$ – analogno prethodnom slučaju, samo što drugi igrač dobija $\frac{v_2 - t_2}{2}$ umjesto nule. No, to opet može poboljšati tako da pričeka malo dulje. Zato ni ovo stanje nije ravnotežno.
- $t_1 < t_2$ – prvi igrač gubi (tj. dobija 0). Ako je $t_2 < v_1$, onda je on mogao popraviti svoju dobit tako da čeka dulje od drugog igrača i dobije $v_2 - t_1 > 0$.

  Ostaje još situacija $t_2 \ge v_1$. U toj situaciji, prvom igraču se ne isplati produljivati čekanje, jer neće ništa dobiti (dapače, ako pretjera može izgubiti). Drugi igrač je tako dobio predmet vrijedan $v_2 - v_1$ novčanih jedinica, bez obzira na to koliko je odlučio čekati, pa zaključujemo da su sva ravnotežna stanja oblika (t_1, t_2) gdje je $t_2 > v_1$ (mora biti strogo veće, inače je to slučaj $t_1 = t_2$ kojeg drugi igrač može "popraviti").

Zadatak: Što bi se desilo kad bi bilo $v_1 = v_2$, tj. kad bi predmet jednako vrijedio obojici igrača?

Zadatak: Igra položaja. Imamo n igrača koji trebaju odlučiti:

1. Da li se ubaciti u politiku?
2. Ako da, za koji položaj se kandidirati?

Imamo kontinuum građana čija omiljena pozicija je dana funkcijom gustoće

$f:[0,1]\to\mathbb{R}_+$. Kandidat privlači glasove onih ljudi čija je preferirana pozicija najbliža njegovoj. Ako više kandidata izabere istu poziciju, onda oni ravnopravno dijele glasove. Pobjednik je kandidat s najviše glasova.

Svaki kandidat, naravno, preferira samostalnu pobjedu, pred dijeljenjem prvog mjesta s drugim kandidatima. Također, "podijeljena pobjeda" je svakom kandidatu draža od nesudjelovanja, koje mu je pak draže od sudjelovanja uz poraz.

Modelirajte strategijsku igru za ovaj problem i nađite ravnotežna stanja za $n=2$, te pokažite da nema ravnoteže za $n=3$.

Zaključak

Eliminacija dominiranih strategija je dobar način redukcije složenosti početnog problema odlučivanja – **ako postoje** dominantne strategije! No, to često nije slučaj i tu "u igru" ulazi Nashov equilibrium. Njegova važnost je u tome da daje garanciju igranja na određeni način ako igrači procijene da će tako igrati njihovi protivnici.

Iako smo ovdje proučavali samo Nahove equilibriume za čiste strategije, slično vrijedi i za miješane strategije (koje ćemo obraditi na nekim od idućih vježbi).