Optimalne strategije

Igre konstantne sume

Prošli put smo uveli koncept igara sume nula. Sličan tip igre su **igre konstantne sume**, kod kojih je ukupna dobit svih igrača jednaka za sve moguće poteze tih igrača. Te igre se trivijalno svode na igre sume nula oduzimanjem konstante od svakog profita.

Traženje strategija se zasniva na usporedbama, te traženjima minimuma i maksimuma, što ne ovisi o oduzimanju/dodavanju konstante.

Primjer 1: Squash. Prvi igrač procjenjuje treba li uputiti lopticu bliže ili dalje, dok ju protivnički igrač pokušava presresti. Očito, šanse za pobjedu prvog igrača su daleko veće ako drugi krivo predvidi njegov potez. Procijenjene dobiti dane su tablicom:

	Bliže	Dalje
Bliže	20%, 80%	70%, 30%
Dalje	90%, 10%	30%, 70%

Naravno, pobjeda jednog znači poraz drugog i obratno, pa je ova igra strogo kompetitivna.

Očito, oduzimanjem 50% od svake dobiti svakog igrača, igra postaje igra sume nula, s tablicom:

	Bliže	Dalje
Bliže	-30%	20%
Dalje	40%	-20%

Naravno, za samo računanje nam ne smetaju "veći" brojevi, a stvarne dobiti su bitne u konačnom rezultatu. Zato oduzetu konstantu treba na kraju vratiti, ili jednostavno raditi s originalnim vrijednostima kao da je riječ o igri sume nula. Dakle, možemo slobodno koristiti tablicu:

	Bliže	Dalje
Bliže	20%	70%
Dalje	90%	30%

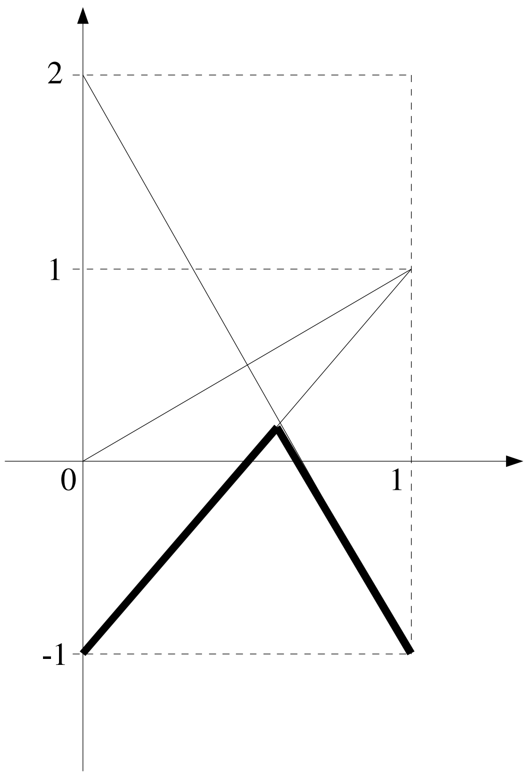
Optimalni odgovori na strategije

Prošli put smo vidjeli kako igrači jednostavno mogu odgovoriti na strategije svojih protivnika. No, kako trebaju igrati igrači koji ne odgovaraju na tuđe strategije, nego određuju svoju strategiju (npr. zbog nepoznavanja protivničke strategije)?

Na primjeru 1 (Pismo-glava) smo pokazali da je optimalni odgovor na strategiju prvog igrača, igranje na onu stranu novčića koju on preferira. Kao logičan zaključak se nametnula strategija (0.5, 0.5) pri kojoj drugom igraču postaje svejedno kako igra, pa prvi igrač postiže najbolju moguću dobit.

Dvije alternative

Intuicija nam ne može uvijek pomoći. Tipičan primjer takve igre je također prikazan prošli put: Dvoprsta Morra. Ako igrač pokuša tu igru igrati nasumično, on će ju trivijalno izgubiti.



Primjer 2: Boje. Dva igrača igraju igru s kartama. Svaki ima asa herca, asa pika i dvojku u jednoj od te dvije boje (jedan dvojku herc, a drugi dvojku pik). Neovisno jedan o drugom, oni biraju koju će kartu baciti. Ako se boje poklope, pobjednik je prvi; inače je pobjednik drugi. Iznimka je ako obojica bace dvojku; u tom slučaju nema pobjednika.

Pobijeđeni plaća pobjedniku onoliko koliko pokazuje pobjednikova karta (as iznosi 1, a dvojka 2).

	A ♥	A ♠	2 ♠
A ♥	1	-1	-2
A ♠	-1	1	1
2 ♥	2	-1	0

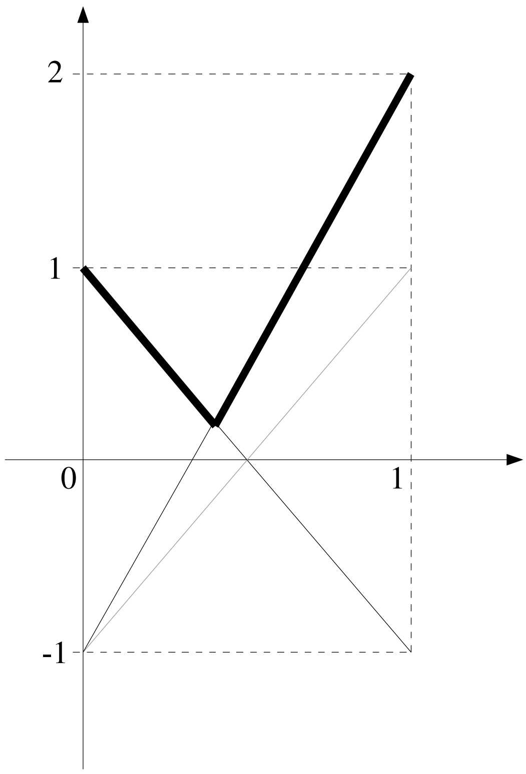
Pokušajmo sada naći optimalnu strategiju za prvog igrača.

Za početak, usporedimo alternative 1 i 3, odnosno prvi i treći redak. Primjećujemo da je treći redak dominantan, tj. da se prvom igraču više isplati izabrati njega, nego prvi redak – bez obzira što drugi igrač odigra! Dakle, razumno je pretpostaviti da će prvi igrač uvijek birati drugi ili treći redak, a nikada prvi.

Slično kao kod analize igre Pismo-glava, recimo da prvi igrač bira drugu akciju s vjerojatnošću p, a treću s vjerojatnošću $1\text{-}p$.

Pretpostavimo da će drugi igrač uvijek igrati na istu kartu. Kolika je očekivana dobit prvog igrača u sva tri slučaja?

	Izbor drugog igrača		
	1	2	3
Očekivana dobit prvog igrača	$2 - 3p$	$2p - 1$	p



Očito, optimalna strategija drugog igrača ovisi o koeficijentu p. Prvi igrač može pretpostaviti da je njegov protivnik dobar igrač, te da će brzo shvatiti koliki je koeficijent p i da će odigrati (za sebe) najbolji potez.

Razmotrene mogućnosti možemo skicirati kao na priloženoj slici.

Drugom igraču je u interesu minimizirati ishod. Zato je na slici podebljan minimum u svakom trenutku.

Sada vidimo da, bez obzira na igru drugog igrača, prvi igrač ima strategiju kojom će zaraditi. Vidimo da je to strategija za *p* koji se dobije kao rješenje jednadžbe:

$$2-3p=2p-1\Rightarrow p=\frac{3}{5}$$

Dakle, ako prvi igrač bude igrao drugu i treću alternativu s učestalostima 3:2, može očekivati zaradu od barem 0.20 po potezu. To će se dogoditi ako drugi igrač bude igrao prvu ili drugu alternativu. Ako bude igrao treću, profit prvoga će biti 0.60.

Na sličan način možemo analizirati igru drugog igrača.

On također pretpostavlja da ima dostojnog protivnika koji će igrati optimalno, pa očito neće izabrati opciju 1. Zbog toga drugi igrač može zanemariti akciju 2, jer je ona (kad ne gledamo prvi redak) dominirana akcijom 3.

Dakle, igra koju razmatra drugi igrač izgleda ovako:

	A ♥	A ♠	2 ♠
A ♥	1	-1	-2
A ♠	-1	1	1
2 ♥	2	-1	0

Očekivanu dobit drugog igrača prikazujemo tablicom, u ovisnosti o parametru q *i* protustrategiji prvog igrača.

	Izbor prvog igrača		
	1	2	3
Očekivana dobit drugog igrača	$2q$ - 1	1 - $2q$	$3q$ - 1

Dakle, drugi igrač će igrati na alternative 1 i 3 s vjerojatnostima q, odnosno 1-q.

Sada ponovno crtamo graf.

Prvi igrač želi maksimizirati svoju dobit i drugi igrač to zna. Pod pretpostavkom da prvi igrač igra najbolje moguće, drugi gleda maksimume u svakoj točki i to želi minimizirati. Sa slike je očito da se to dešava za:

$$1-2q=3q-1\Rightarrow q=\frac{2}{5}$$

Uz takvu igru, on očekuje gubitak od 0.20, ako njegov protivnik mudro odigra. Ako prvi igrač odigra manje mudro, drugi može čak i dobiti 0.20.

Iz svega ovoga je jasno da ova igra nije “pravedna”, tj. da je prvi igrač u prednosti.

Strategije dobivene opisanim postupkom zovemo “**minimax**”, odnosno “**maximin**” strategijama (ovisno o tome da li igrač minimizira protivnikove maksimume ili maksimizira protivnikove minimume).

Agresivnija igra

Pokazali smo kako izgleda kad prvi igrač igra na maximin strategiju. No, što ta strategija predstavlja, običnim, laičkim riječnikom?

Igrač pretpostavlja da će njegov protivnik naslutiti njegove poteze i odigrati najbolje za sebe. To protivnikovo “najbolje” je za njega najgore, tj. najmanja dobit koju on pokušava maksimizirati.

Drugim riječima, maximin strategija je za prvog igrača pesimističan način igre.

Takav pristup (maximin za prvog, odnosno minimax za drugog igrača) zovemo **igranje na sigurno**, tj. **sigurna strategija**.

Suprotno tom pristupu, prvi igrač može obratno zaključivati: ja ću odigrati najbolje što mogu, a moj protivnik će na to odgovoriti najbolje što on može. Dakle, ja ću maksimizirati svoju dobit, a tek onda će ju on pokušati minimizirati.

No, upravo je to minimax strategija. Dakle, nju igrač može primijeniti da bi predvidio poteze svog protivnika.

Teorem 1: Generalno, minimax strategija će za prvog igrača dati bolji rezultat nego maximin. Analogno, drugom igraču se upravo maximin pristup više isplati od minimaxa.

Teorem nećemo dokazivati, no on je i intuitivno dosta jasan. Iz perspektive prvog igrača: ako je krivo procijenio potez protivnika, u slučaju minimaxa, to znači da je drugi loše odgovorio na strategiju, dok u slučaju maximina to znači da se prvi "pokriva" protiv pogrešne strategije drugog (tj. strategije koju drugi uopće ne igra).

U primjeru igre boja, kao što vidimo, te dvije strategije daju jednak profit.

Zadatak 1: Na prikazani način riješite igru Pismo-glava, tj. pokažite da su optimalne strategije za oba igrača (0.5, 0.5).

Zadatak 2: Riješite igru Squash na prikazani način (tj. pronađite optimalnu strategiju za prvog igrača i najbolji odgovor za drugog).

Grafičko rješavanje matričnih igara s više od dvije alternative (po igraču)

Teorem. Dana je matrica $A=\left[a_{ij}\right]$, reda $m\times n.$ Tada postoje vektori:

$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$, t.d. $x_i\geq 0$, $x_1+x_2+\cdots+x_m=1$ i

$y=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$, t.d. $y_i\geq 0$, $y_1+y_2+\cdots+y_n=1$

te realan broj v takvi da vrijedi:

(1) $x_1 a_{1j}+x_2 a_{2j}+\cdots+x_m a_{mj}\geq v$ za sve $j=1,\ldots,n$

(2) $a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{in}y_n\leq v$ za sve $i=1,\ldots,m$

Teorem nećemo dokazivati, ali on je osnova za rješavanje matričnih igara, jer nam govori da postoje minimax i maximin strategije za igrače.

Iz priloženog je jasno da dobiti igrača u igri možemo lako računati u ovisnosti o izabranim (miješanim) strategijama, no ipak je jednostavnije ako se to radi grafički.

Na žalost, najviše što možemo zamisliti (i nacrtati) su tri dimenzije. Zato ćemo se, za grafičko računanje, ograničiti na igre reda $3\times n$ (prilikom traženja strategije za drugog igrača). Takvu matricu možemo gledati kao niz od n vektora u $\mathbb{R}^3$. Gledamo konveksnu ljusku C tih vektora. Zašto?

Razlog je jednostavan. Skup svih očekivanih ishoda za drugog igrača možemo dobiti kao konveksnu kombinaciju tih vektora.

Nadalje, želimo translatirati "negativni" oktant S_v po pravcu $t_1=t_2=t_3$ tako da on dodiruje *C*, tj. tako da vrijedi $t_1 \leq v, t_1 \leq v, t_2 \leq v, t_3 \leq v$. Drugim riječima, translatirat ćemo ga duž pravca $t_1 = t_2 = t_3$ za $\sqrt{v^2 + v^2 + v^2} = v\sqrt{3}$. Zašto baš tako, postaje jasnije kad se nacrta u dvije dimenzije. Ovaj raspis je dan na predavanjima, pa ga nećemo dalje obrađivati.

Grafički, to je najlakše postići crtanjem u tzv. *trokutnim koordinatama*. Kako se to radi?

Da bi nacrtali trodimenzionalnu sliku, potrebno je odrediti točku gledišta u samom sustavu. Mi biramo da je to neka točka daleko od ishodišta, na pravcu $t_1 = t_2 = t_3$. Zašto baš tako?

Prilikom crtanja trodimenzionalnog sustava u dvije dimenzije, nužno neke točke moraju pasti na isto mjesto. Uz ovakav odabir točke gledanja, sve točke oblika $(t_1 + t, t_2 + t, t_3 + t)$ crtamo na istom mjestu, što znači da će se preklapati upravo točke koje pripadaju pravcima duž kojih translatiramo sustav. Dakle, proizvoljnu točku (t_1, t_2, t_3) možemo crtati kao točku $(t_1 - t_3, t_2 - t_3, 0)$.

Primjer 2. Pogledajmo slijedeću apstraktnu igru:

3	-2	4
-1	4	2
2	2	6

Zanimaju nas točke: $A = (3, -1, 2), B = (-2, 4, 2)$ i $C = (4, 2, 6)$. Čiste strategije drugog igrača čine konveksnu ljusku:

$$C = \{T = (t_1, t_2, t_3) : T = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C, 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

Na slici desno je igra nacrtana "u tri dimenzije".

Podebljane linije prikazuju konveksnu ljusku *C* i oktant S_v.

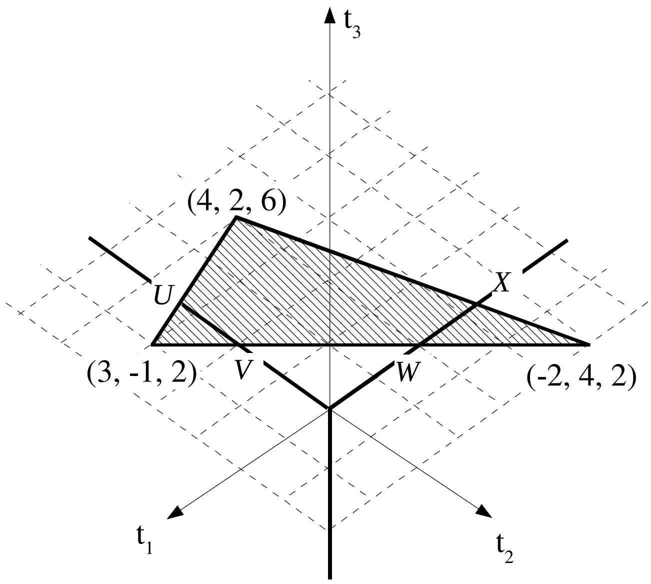
Ljuska i oktant dolaze u dodir na poligonu kojeg mogu određivati samo vrhovi od *C*, te točke *U*, *V*, *W* i *X*.

Slično kao u dokazu Osnovnog teorema, tražimo:

$e = E(T) = \max\{t_1, t_2, t_3\}$

Prvo treba naći točke *U*, *V*, *W* i *X*.

Na primjer, točka *U* je određena sustavom jednadžbi:



$$u_1 = u_3 \text{ (jer ima projekciju u točki } (0, y, 0) \text{ po pravcu } t_1 = t_2 = t_3)$$

$$U = (u_1, u_2, u_3) = a \cdot (3, -1, 2) + b \cdot (4, 2, 6)$$

$$a \geq 0, b \geq 0$$

$$a + b = 1$$

Sada lako dobijemo: $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo i samu točku U. Na sličan način izračunamo i ostale točke:

$$\begin{array}{ll} U=\left(\frac{10}{3}, 0, \frac{10}{3}\right) & E(U)=\frac{10}{3} \\ V=(2,0,2) & E(U)=2 \\ W=(0,2,2) & E(U)=2 \\ X=\left(0, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) & E(U)=\frac{10}{3} \end{array}$$

Treba još izračunati vrijednosti funkcije E u vrhovima od C:

$$\begin{array}{l} E((3,-1,2))=3 \\ E((-2,4,2))=4 \\ E((4,2,6))=6 \end{array}$$

Tražimo strategiju za drugog igrača, pa želimo minimizirati vrijednost igre, odnosno funkciju $E(T)$ na skupu dopustivih točaka T. Taj minimum je, očito, 2 i postiže se na segmentu koji povezuje točke V i W. Primijetimo da vrijedi:

$$\begin{array}{l} V=\frac{4}{5}\cdot(3,-1,2)+\frac{1}{5}\cdot(-2,4,2) \\ W=\frac{2}{5}\cdot(3,-1,2)+\frac{3}{5}\cdot(-2,4,2) \end{array}$$

Dakle, drugi igrač ima dvije "ekstremne" optimalne strategije:

$$\bar{Y}=\begin{cases} \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) \\ \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right) \end{cases}$$

Sve optimalne strategije drugog igrača su konveksne kombinacije ove dvije!

Jedina hiperravnina koja odvaja C i S_v je ona koja prolazi točkom $(2,2,2)$ i paralelna je s ravninom $t_1 t_2$. Riječ je, naravno, o ravnini $t_3=2$.

Optimalna strategija za prvog igrača je normala na tu ravninu, dakle:

$$\bar{X}=(0,0,1)$$

Primijetimo da optimalna strategija za drugog igrača isključuje igranje treće alternative. Ako malo bolje pogledamo, to je savršeno logično, jer je treća akcija domirina prvom (tj. treći stupac je veći ili jednak od prvog pos vim komponentama)!

Nashov equilibrium

Što se događa ako igra ima Nashov equilibrium, te ako igrači zaigraju upravo na poteze koji ga određuju?

Za početak, podsjetimo se što je Nashov equilibrium: uređena n-torka strategija u kojoj se ni jednom igraču ne isplati promijeniti njegovu strategiju, pod pretpostavkom da ni drugi ne mijenjaju svoje strategije.

Nashov equilibrium za igre sume nula ima zanimljivu karakterizaciju:

Karakterizacija. Par miješanih strategija $(\tilde{p},\tilde{q})$ je Nashov equilibrium za igru sume nula ako za sve čiste strategije s_1 i s_2 vrijedi: $E(\tilde{p},s_2) \geq E(\tilde{p},\tilde{q}) \geq E(s_1,\tilde{q})$.

Prva nejednakost kaže da je dobit prvog igrača minimizirana po svim mogućim potezima drugog igrača, tj. da je $\tilde{q}$ optimalna protustrategija drugog igrača za strategiju $\tilde{p}$ prvog igrača. Druga nejednakost kaže da je $\tilde{p}$ optimalna strategija za prvog igrača.

Propozicija. Neka je $(\tilde{p},\tilde{q})$ Nashov equilibrium za igru sume nula. Tada su $\tilde{p}$ i $\tilde{q}$ sigurne strategije, a maxmin i minimax dobiti su međusobno jednake, te jednake onoj za par strategija $(\tilde{p},\tilde{q})$. Obratno, neka su dobiti u minimax i maximin pristupu jednake. Tada sigurne strategije daju Nashov equilibrium za igru.

Za primjenu je važan slijedeći

Korolar. Ako u igri sume nula ima više Nashovih equilibriuma, onda su dobiti u svima njima međusobno jednake.

Ako u zadacima nije naglašeno da se traže čiste strategije, znači da treba naći miješane strategije.

Zadatak 3: Neka je dana igra sume nula:

5	8	4
-7	9	0
9	1	-2

a) Nađite maximin strategiju i dobit za prvog igrača.

b) Koju najmanju dobit može očekivati prvi igrač ako igra sa strategijom $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$?

c) Koju najmanju dobit može očekivati prvi igrač ako igra sa strategijom $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$?

Zadatak 4: Riješite prethodni zadatak uz modificiranu tablicu dobiti:

5	8	**−4**
-7	9	0
9	1	-2