Ekstenzivne igre uz savršene informacije

Vedran Šego

1. Uvod

Ekstenzivna igra je detaljan opis sekvencijalne[1] strukture problema odlučivanja igrača.

Kažemo da igrači imaju savršene informacije ako su im, prilikom donošenja bilo koje odluke, poznati svi događaji koji su se do tada dogodili.

Zbog jednostavnosti, pretpostavljamo da igrači igraju naizmjence (dakle nikad simultano), te da nema nikakvog faktora slučajnosti.

Definicija 1. *Ekstenzivna igra sa savršenim informacijama ima slijedeće komponente:*

- *Skup igrača* N
- *Skup sekvenci* H *(konačan ili beskonačan) sa slijedećim svojstvima:*
  1. $\emptyset \in H$.
  2. *Ako je* $(a^k)_{k=1}^K \in H$ *(gdje je* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*), te ako je* $L < K$ *tada je i* $(a^k)_{k=1}^L \in H$.
  3. *Ako za niz* $(a^k)_{k=1}^\infty$ *vrijedi* $(a^k)_{k=1}^L \in H$ *za svaki* $L \in \mathbb{N}$*, onda je i* $(a^k)_{k=1}^\infty \in H$.

  Elemente od H *zovemo povijest (engl. history), a komponente povijesti akcije.*

  Povijest $(a^k)_{k=1}^K \in H$ *je terminalna ako je beskonačna ili ne postoji akcija* a^{K+1} *takva da je* $(a^k)_{k=1}^{K+1} \in H$*. Skup terminalnih povijesti označavamo sa* Z.
- *Funkcija* P *koja svakoj neterminalnoj povijesti (tj. elementima skupa* $H \setminus Z$*) pridružuje element od* N*. Funkciju* P *zovemo funkcija igrača (engl. player function).*

  Interpretacija je slijedeća: $P(h)$ *je igrač koji je na potezu nakon povijesti* $h \in H$.
- *Relacija uređaja* $\succeq_i$ *nad* Z *za svakog igrača* $i \in N$ *(relacija preferenci igrača* i*).*

[1] Pod pojmom "sekvencijalna" struktura mislimo na strukturu kojom se opisuje niz poteza koji mogu biti planirani (strategija) ili odigrani (povijest).

Ponekad je praktično izostaviti relacije preferencije igrača. Uređenu trojku (N, H, P) zovemo **igra u ekstenzivnom obliku sa savršenim informacijama**. Takve igre ćemo često kratko zvati samo "ekstenzivne igre".

Ako je skup povijesti H konačan, onda je i igra konačna. Ako je najdulja povijest igre konačna, kažemo da igra ima konačan horizont (engl. *finite horizon*).

Neka je $h \in H$ povijest duljine k. S (h, a) označavamo povijest duljine $k + 1$ koja se sastoji od h s dodanom akcijom a na kraju.

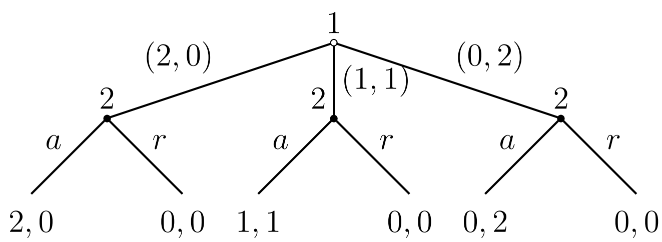
2. Interpretacija

Nakon svake neterminalne povijesti h, igrač $P(h)$ bira akciju iz skupa $A(h) := \{a : (h, a) \in H\}$.

Igru započinjemo praznom poviješću, koju još zovemo i inicijalna povijest, u oznaci $\emptyset$. U tom trenutku igrač $P(\emptyset)$ birak element a^0 skupa $A(\emptyset)$ (akciju). Za svaku moguću akciju $a^0 \in A(\emptyset)$, igrač $P(a^0)$ bira element skupa $A(a^0)$. Taj izbor određuje njegov potez. Igra se dalje nastavlja analogno.

Povijest nakon koje više ne treba vući poteze je terminalna.

Kao kod strateških (tj. matričnih) igara, često određujemo korisnost (engl. *payoff*) za terminalne povijesti, zadavanjem funkcije korisnosti koja predstavlja relaciju preference.



Slika 1. Ekstenzivna igra iz primjera 1

Primjer 1. *Dva igrača trebaju podijeliti dva identična, nedjeljiva objekta. Jedan od njih može predložiti podjelu, a drugi ju može prihvatiti ili odbiti. Ako igrač prihvati, predmeti se raspoređuju prema prijedlogu, a ako odbije, nitko ne dobija ništa.*

Svakog igrača zanima samo broj predmeta koje će dobiti (npr. predmeti su jednako vrijedni).

Modeliramo ekstenzivnu igru $(N, H, P, (\succeq_i))$:

- $N = \{1, 2\}$
- $H = \{\emptyset, ((2,0)), ((1,1)), ((0,2)), ((2,0), a), ((2,0), n), ((1,1), a)\} \cup \{((1,1), n), ((0,2), a), ((0,2), n)\}$
- $P(\emptyset) = 1$, $P(h) = 2$ *za svaku neterminalnu povijest* $h \neq \emptyset$.
- $((2,0), y) \succ_1 ((1,1), y) \succ_1 ((0,2), y) \sim_1 ((2,0), n) \sim_1 ((1,1), n) \sim_1 ((0,2), n)$

$((0,2),y) \succ_2 ((1,1),y) \succ_2 ((2,0),y) \sim_2 ((0,2),n) \sim_2 ((1,1),n) \sim_2 ((2,0),n)$

Igru možemo grafički prikazati kao na slici 1.

Kružić s oznakom 1 *predstavlja inicijalnu povijest (tj. početnu točku igre) nakon koje je igrač* 1 *na potezu. Tri brida iz tog čvora označavaju tri poteza koje igrač može odigrati (dakle, to su elementi skupa $A(\emptyset)$). Oznake uz bridove govore o kojim potezima je riječ. Pri tome oznaka $(k, 2-k)$ označava prijedlog da prvi igrač dobija k predmeta, a drugi preostalih $2-k$.*

Svaki od tih bridova vodi u disk s oznakom 2 *koja označava da je igrač* 2 *na potezu nakon svake povijesti duljine* 1*. Oznake uz bridove koji izlaze iz tih čvorova opisuju akcije koje ti bridovi reprezentiraju: a znači "prihvaća" (engl. accept), a r "odbija" (engl. reject) ponudu.*

Na kraju svake terminalne povijesti (tj. lista u stablu) zadane su preference (u našem slučaju dobiti) pojedinih igrača. Prvi broj predstavlja preferencu prvog, a drugi broj preferencu drugog igrača.

Slika 1 sugerira da ekstenzivne igre možemo definirati i pomoću stabla, što je uobičajeno. Ipak, pristup preko sekvenci je prirodniji, te pruža nešto veću općenitost (beskonačna stabla je teško nacrtati).

3. Strategije

Strategija igrača u ekstenzivnoj igri je plan igre za svaku povijest nakon koje je on na redu za igru.

Definicija 2. *Strategija igrača $i \in N$ u ekstenzivnoj igri uz savršene informacije $(N, H, P, (\succeq_i))$ je funkcija koja svakoj neterminalnoj povijesti $h \in H \setminus Z$ takvoj da je $P(h) = i$ pridružuje neku akciju iz skupa $A(h)$.*

Primijetimo da zapis strategije ovisi samo o (N, H, P), tj. nema veze s preferencama.

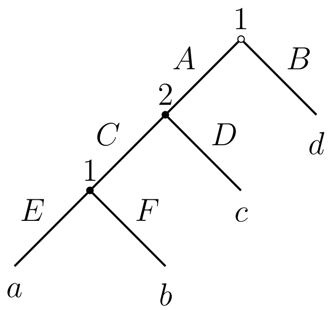
Vratimo se na prethodni primjer. Igrač 1 igra samo prvi potez, pa je njegove strategije lako pobrojati: $(2,0)$, $(1,1)$ i $(0,2)$.

Igrač 2 igra nakon igrača 1, pa treba imati strategije za svaki potez koji je on mogao odigrati. Strategije drugog igrača su oblika $a_2b_2c_2$, uz interpretaciju: *ako igrač* 1 *odigra* $(2,0)$*, igrač* 2 *će izabrati* a_2*; ako igrač* 1 *odigra* $(1,1)$*, igrač* 2 *će izabrati* b_2*; ako igrač* 1 *odigra* $(0,2)$*, igrač* 2 *će izabrati* c_2. Naravno, vrijedi: $a_2, b_2, c_2 \in \{a, r\}$.

Pogledajmo još jednu igru:

Primjer 2. *U igri prikazanoj na slici 2 igrač* 1 *vuče potez i prije i nakon igrača* 2 *(osim ako igrač* 2 *dođe na potez i odigra D).*

Ovdje možemo vidjeti važnu karakteristiku strategija nekog igrača: treba specificirati akcije za sve povijesti nakon kojih je taj igrač na potezu, čak i za povijesti do kojih nikad nećemo doći ako slijedimo tu strategiju! Zato strategije za igrača 1 **nisu** *samo AE i AF, nego i BE*



SLIKA 2. Ekstenzivna igra u kojoj prvi igrač igra i prije i poslije drugog

i BF (ukupno četiri strategije!). Dakle, treba definirati akciju nakon povijesti (A, C) čak i ako strategija kaže da će prvi igrač izabrati B u prvom potezu!

Iako ta "potpunost" strategija može djelovati zbunjujuće, definicija je u skladu s idejom da igrači odluče o svojoj strategiji **prije** *nego igra počne.*

Zbog svojstva prikazanog u prethodnom primjeru, strategija se razlikuje od onoga što bismo smatrali "akcijskim planom".

Kako ćemo uskoro vidjeti, ponekad možemo poistovjetiti strategije BE i BF, no ponekad ih moramo i razlikovati.

DEFINICIJA 3. *Za svaki strateški profil*[2] $s = (s_i)_{i \in N}$ *u ekstenzivnoj igri* $(N, H, P, (\succeq_i))$ *definiramo ishod (eng. outcome)* $O(s)$ *kao terminalnu povijest kojom rezultira igra ako svaki igrač slijedi svoju strategiju* s_i*. Drugim riječima,* $O(s)$ *je (ne nužno konačna!) povijest* $(a^1, a^2, \ldots, a^K) \in Z$ *takva da za svaki* k, $0 \le k < K$ *vrijedi:*

$$s_{P(a^1,\ldots,a^k)}(a^1, a^2, \ldots, a^k) = a^{k+1}$$

Kao i u strateškim igrama, i ovdje možemo definirati miješanu strategiju kao vjerojatnosnu distribuciju nad skupom čistih strategija. No, u ekstenzivnim igrama uz savršene informacije, takav pristup ne donosi kvalitativno ništa novo, jer igrači manje-više jednostavno mogu predvidjeti tijek igre. Zato, miješane strategije postaju zanimljive tek kod ekstenivnih igara kod kojih igrači nemaju potpune informacije prilikom igranja svojih poteza.

4. Nashov equilibrium

Najjednostavniji pristup ekstenzivnim igrama ignorira sekvencijalnu strukturu igre. Strategije promatramo kao odluke koje se donose **prije** nego igra uopće počne, te se kroz samu igru **ne mijenjaju**.

[2]strateški profil je kolekcija strategija za sve igrače

DEFINICIJA 4. *Nashov equilibrium za ekstenzivnu igru uz savršene informacije* $(N, H, P, (\succeq_i))$ *je strateški profil* S^* *takav da za svakog igrača* $i \in N$ *vrijedi:*

$$O(s^*_{-i}, s^*_i) \succeq_i O(s^*_{-i}, s_i), \text{ za svaku strategiju } s_i \text{ igrača } i$$

Oznaka s^*_{-i} *označava strateški profil bez strategije* i*-tog igrača.*

Alternativno, možemo definirati Nashov equilibrium ekstenzivne igre kao strategiju koja odgovara Nashovom equilibriumu odgovarajuće strateške igre.

Kako pretvaramo ekstenzivnu igru u stratešku? Jednostavnim popisivanjem **svih strategija za sve igrače**, te navođenjem korisnosti svih ishoda.

ZADATAK 3. *Napišite strateški oblik igre iz primjera 1.*

RJEŠENJE.

	a	r
$(2,0)$	$(2,0)$	$(0,0)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(0,0)$
$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,0)$

□

ZADATAK 4. *Napišite strateški oblik igre iz primjera 2.*

ZADATAK 5. *Neka je* G *strateška igra dva igrača. Igrač* i *na raspolaganju ima akcije* $A_i := \{a'_i, a''_i\}$*, a relacija preferenci između korisnosti pojedinih stanja je* $\succeq_i$*. Dokažite ili opovrgnite:* G *je strateška reprezentacija neke ekstenzivne igre uz savršene informacije ako i samo ako vrijedi:*

$$\begin{aligned} &\exists a_1 \in A_1 : \ (a_1, a'_2) \sim_i (a_1, a''_2) \text{ ili} \\ &\exists a_2 \in A_2 : \ (a'_1, a_2) \sim_i (a''_1, a_2) \end{aligned}$$

Kako ćemo uskoro vidjeti, Nashov equilibrium nije jedini način rješavanja ekstenzivnih igara. Kad bi on to bio, strategije bismo mogli definirati puno strože, inzistirajući samo na ishodima do kojih nas strategija može dovesti.

DEFINICIJA 5 (Reducirana strategija). *Reducirana strategija igrača* i *je funkcija* f_i *čija je domena podskup skupa* $\{h \in H : \ P(h) = i\}$ *sa slijedećim svojstvima:*

1. $f_i(h) \in A(h)\ \forall h \in \mathit{dom}\, f_i$
2. *povjest* h*, takva da je* $P(h) = i$*, je element domene funkcije* f_i *ako i samo ako su sve akcije igrača* i *u povijesti* h *diktirane funkcijom* f_i*.*
   Drugim riječima, ako je $h = (a^k)$ *i ako je* $h' = (a^k)_{k=1,2,\ldots,L}$ *podniz od* h *takav da je* $P(h') = i$*, tada je* $f_i(h') = a^{L+1}$*.*

Nashov equilibrium ekstenzivne igre odgovara Nashovom equilibriumu strateške igre u kojoj je skup svih akcija jednak skupu svih reduciranih strategija.

Definicija potpunih strategija će nam trebati kasnije, prilikom analize podigara.

Primjer 6. *Reducirane strategije igrača* 1 *u igri prikazanoj na slici 2 su:*

(1) $f_1^1(\emptyset) = B$, *s domenom* $\mathrm{dom}\, f_1^1 = \{\emptyset\}$
(2) $f_1^2(\emptyset) = A$ *i* $f_1^2(A, C) = E$, *s domenom* $\mathrm{dom}\, f_i^2 = \{\emptyset, (A, C)\}$
(3) $f_1^3(\emptyset) = A$ *i* $f_1^2(A, C) = F$, *s domenom* $\mathrm{dom}\, f_i^3 = \{\emptyset, (A, C)\}$

U nekim igrama mogu postojati različite strategije koje donose jednaku dobit (što nije isto što i jednak ishod!). Na primjer, u igri sa slike 2, ako je $a = b$, strategije f_2^2 i f_3^2 (opisane u prethodnom primjeru) će dovesti do jednakog profita.

Ovu dodatnu redundanciju, koje nas ne oslobađa čak niti definicija reduciranih strategija, možemo izbjeći redukcijom same igre:

Definicija 6. *Neka je* $\Gamma = (N, H, P, (\succeq_i))$ *ekstenzivna igra uz savršene informacije, te neka je* $(N, (S_i), (\succeq_i'))$ *pripadna strategijska igra. Za proizvoljni* $i \in N$ *kažemo da su strategije* $s_i, s_i' \in S_i$ *ekvivalentne ako za svake* $s_{-i} \in S_{-i}$ *i* $j \in N$ *vrijedi:* $(s_{-i}, s_i) \sim_j' (s_{-i}, s_i')$.

Reducirana strateška forma igre Γ *je strateška igra* $(N, (S_i'), (\succeq_i''))$ *u kojoj svaki skup* S_i' *(za svakog igrača* $i \in N$*) sadrži točno jednu strategiju iz svake klase ekvivalencije strategija iz* S_i *(dakle, iz svakog skupa međusobno ekvivalentnih strategija uzimamo točno jednu). Relacija preferencije* $(\succeq_i''))$ *nad* $\times_{j \in N} S_j'$ *inducirana je relacijom* $(\succeq_i'))$.

Iako se formalan zapis reducirane strateške forme može činiti kompliciran, riječ je o intuitivno jasnoj eliminaciji strategija koje dovode do jednakog profita.

Primijetimo da definicija daje mogućnost izbora strategija, što znači da se uz jednu igru može vezati više reduciranih strateških formi. Ipak, prilikom analize igara nazivi akcija nas ne zanimaju, nego su interesantni samo profiti, pa će sve reducirane forme biti ekvivalentne.

Primjer 7. *Vratimo se na primjer 2. Strateška forma te igre je:*

	C	D
AE	a	c
AF	b	c
BE	d	d
BE	d	d

Reducirana strateška forma je:

	C	D
AE	a	c
AF	b	c
B	d	d

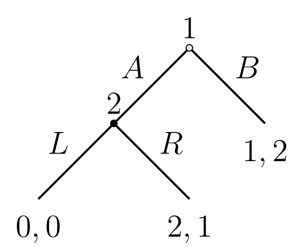
Ako je $a = b$, onda reducirana strateška forma može biti:

	C	D
AE	a	c
B	d	d

ili

	C	D
AF	a	c
B	d	d

Ponekad Nashov equilibrium može imati nezgodnu karakteristiku prikazanu kroz slijedeća dva primjera:



SLIKA 3. Ekstenzivna igra dva igrača

PRIMJER 8. *Igra prikazana na slici 3 ima dva Nashova equilibriuma: (A, R) s profitima $(2, 1)$ i (B, L) s profitima $(1, 2)$.*

Strategijski profil (B, L) je Nashov equilibrium zato jer **ako** *igrač 2 odluči odigrati potez L (nakon povijesti (A)), optimalan izbor za igrača 1 je potez B (nakon povijesti $\emptyset$, tj. u prvom potezu). Slično,* **ako** *igrač 1 u prvom potezu odigra B, igrač 2 će optimalni profit ostvariti izborom poteza L (jer njegov izbor ne igra nikakvu ulogu, pa je svejedno što izabere).*

No, ekstenzivna forma služi za proučavanje sekvencijalnih igara. Dakle, nakon svake neterminalne povijesti, igrač odlučuje koji potez će odigrati, pa postaje prilično neuvjerljivo da će igrači uopće doći do povijesti (B, L). Naime, ako prvi igrač odigra A, logično je očekivati da će drugi igrač odigrati R jer tako dobija profit 1 (umjesto 0). No, taj ishod će prvom igraču donijeti profit 2 što je više nego da je odigrao B.

"Prijetnja" Nashovog equilibriuma se bazira na tome da je, u slučaju da prvi igrač izabere B, drugome svejedno što će odigrati, pa **može** *odigrati L. Zato ispada da se prvome ne isplati predomisliti. No, ako se on predomisli, drugom igraču više nije svejedno i on će tada pouzdano*

odigrati R što u konačnici prvom igraču donosi veći profit nego da je odigrao potez B.

Primjer 9. *Nashovi equilibriumi u igri 1 su:* $((2,0), yyy)$, $((2,0), yyn)$, $((2,0), yny)$, $((2,0), ynn)$, $((1,1), nyy)$, $((1,1), nyn)$, $((0,2), nny)$, $((2,0), nny)$ *i* $((2,0), nnn)$.

Prva četiri rezultiraju profitima $(2,0)$, *iduća dva daju profite* $(1,1)$, *dok zadnja dva daju* $(0,0)$.

No, svi ovi equilibriumi osim $((2,0), yyy)$ *i* $((1,1), nyy)$ *uključuju ponašanje igrača* 2 *koje je neuvjerljivo u nekim povijestima (jer odbija akcije koje bi mu donijele barem* 1 *predmet umjesto ničega).*

Ovaj problem Nashovog equilibriuma kod extenzivnih igara riješit ćemo konceptom podigre.

5. Podigre

Definicija 7. *Podigra ekstenzivne igre sa savršenim informacijama* $\Gamma = (N, H, P, (\succeq_i))$ *koja prati povijest* h *je ekstenzivna igra*

$$\Gamma(h) = (N, H|_h, P|_h, (\succeq_i |_h))$$

gdje je $H|_h$ *skup akcijskih sekvenci* h' *takvih da je* $(h, h') \in H$, $P|_h$ *je definirana formulom* $P|_h(h') := P(h, h')$, *dok je* $\succeq_i |_h$ *definirana:* $h' \succeq_i |_h h''$ *ako i samo ako je* $(h, h') \succeq_i (h, h'')$.

U terminima teorije grafova, podigra je podstablo igre.

Equilibrium koji ćemo sada definirati, zahtijeva optimalnost akcija svih igrača uz zadane strategije drugih igrača, nakon svake povijesti.

Neka je dana strategija s_i ograča i, te povijesh h ekstenzivne igre Γ. Sa $s_i|_h$ ćemo označavati strategiju koju s_i inducira u podigri $\Gamma(h)$, tj. $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$ za svaki $h' \in H|_h$. S O_h ćemo označavati funkciju ishoda igre $\Gamma(h)$.

Definicija 8. *Savršeni equilibrium podigara ekstenzivne igre uz savršene informacije* $\Gamma = (N, H, P, (\succeq_i))$ *je strategijski profil* s^* *takav da za svakog igrača* $i \in N$ *i svaku neterminalnu povijest* $h \in H \setminus Z$ *takvu da je* $P(h) = i$ *vrijedi:*

$$O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h) \succeq_i |_h O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i)$$

za svaku strategiju s_i *igrača* i *u podigri* $\Gamma(h)$.

Ekvivalentno, savršeni equilibrium podigara možemo definirati kao strateški profil s^* igre Γ takav da je za svaku povijest h strateški profil $s^*|_h$ Nashov equilibrium podigre $\Gamma(h)$.

Laički rečeno, strategijski profil je savršeni equilibrium ako je on Nashov equilibrium za svaku podigru.

U igri iz primjera 8, jedini savršeni equilibrium je (A, R).

Zadatak 10. *Koji su savršeni equilibriumi u igri iz primjera 1?*

Rješenje. Savršeni equilibriumi su: $((2,0), yyy)$ i $((1,1), nyy)$.

Za prvi je relativno jasno: nikome se ne isplati predomisliti se niti u jednoj situaciji jer prvi dobija maksimalno, a drugi ne dobija nista bez obzira na svoju odluku.

Za drugi je objašnjenje slijedeće: ako se prvi igrač predomisli, dobit će nulu (u oba slučaja) umjesto 1. Drugi, ako se predomisli za prvu mogućnost (tj. za potez nakon povijesti $((2,0))$)) i zaigra y, ne mijenja ništa. Ako se predomisli za potez nakon povijesti $((1,1))$ i odigra n, ne dobija ništa (što je lošije od trenutne jedinice). Ako se predomisli za "najdesniju" povijest i odigra n, onda tamo dobija 0 umjesto 2.

Na primjer, $((0,2), xxx)$ ne može biti savršeni equilibrium (sa x označavamo proizvoljni potez drugog igrača). Naime, ako je strategija drugog igrača bilo što osim nny ili nnn, onda se prvom igraču isplati promijeniti odluku. No, ako drugi igrač odigra nnx, njemu se u podigri induciranoj poviješću $((1,1))$ (dakle u srednjem podstablu) isplati promijeniti strategiju i odigrati nyx. □

Primjer 11 (Stackelbergove igre). *Stackelbergova igra je extenzivna igra uz savršene informacije za dva igrača u kojoj "vođa" donosi odluku iz skupa A_1, a "sljedbenik", uz informaciju o tome što je vođa odlučio, bira akciju iz skupa A_2.*

Rješenje ovakvih igara u ekonomiji je obično savršeni equilibrium (iako ponekad uz drugačiju terminologiju). Neki (ali ne svi) savršeni equilibriumi odgovaraju rješenju maksimizacijskog problema:

$$\max_{(a_1,a_2)\in A_1\times A_2} u_1(a_1,a_2) \text{ za } a_2 \text{ takve da je } u_2(a_2) = \max_{a_2'\in A_2} u_2(a_1,a_2')$$

gdje su u_i fukncije vrijednosti igrača i.

Ako su skupovi akcija igrača A_i kompaktni, te ako su funkcije u_i neprekidne, tada opisani maksimizacijski problem ima rješenje.

Za provjeru prema definiciji da li je neki strateški profil s^* savršeni equilibrium, moramo za svakog igrača i za svaku podigru provjeriti da ne postoji ishod koji se tom igraču više isplati. Taj postupak možemo olakšati za igre s konačnim horizontom, koncentrirajući se samo na strategije koje se razlikuju od s^* u akcijama koje propisuju nakon samo jedne povijesti.

Preciznije, strateški profil je savršeni equilibrium ako i samo ako za svaku podigru igrač koji je na potezu ne može popraviti svoj ishod promjenom samo tog prvog poteza.

Definicija 9. *Duljina igre Γ je $l(\Gamma)$, duljina najdulje povijesti u toj igri.*

Lema 10 (Svojstvo jedne izmjene). *Neka je $\Gamma = (N, H, P, (\succeq_i))$ ekstenzivna igra uz savršene informacije, s konačnim horizontom (tj. $l(\Gamma) < \infty$). Strateški profil s^* je savršeni equilibrium igre Γ ako i samo ako za svakog igrača $i \in N$ i za svaku povijest $h \in H$ takvu da je*

$P(h) = i$ vrijedi:

$$O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h) \succeq_i |_h O_h(s^*_{-i}|_h, s_i|_h)$$

za svaku strategiju s_i igrača i u podigri $\Gamma(h)$ koja se od $s^*_i|_h$ razlikuje samo u akciji propisanoj neposredno nakon inicijalne povijesti igre $\Gamma(h)$.

Ovo praktično svojstvo daje izuzetno važnu posljedicu:

Teorem 11 (Kuhnov teorem). *Svaka konačna ekstenzivna igra uz savršene informacije ima savršeni equilibrium.*

Dokaz je konstruktivan, a ovdje ćemo dati samo postupak rješavanja takve igre.

Konstrukcija 1. *Za svaku najdulju neterminalnu povijest biramo optimalnu akciju igrača koji je nakon te povijesti na potezu. Zatim svaku od njih zamjenjujemo s terminalnom povijesti iste duljine i akcija, te s ishodom koji bi dobili izborom odabrane akcije. Postupak ponavljamo dok ne ostane samo inicijalna povijest.*

Postupak opisan u prethodnoj konstrukciji obično zovemo i *Povratna indukcija* (engl. *backwards induction*).

Kuhnov teorem ima dalekosežne posljedice, od kojih se možda najzanimljivija odnosi na šah. Naime, uz pravilo da igra završava remijem (izjednačenjem) ako se određena situacija ponovi k puta (obično je $k = 3$), šah postaje konačna igra. Zbog stroge kompetitivnosti šaha, profit equilibriuma je jednoznačno određen, te svaki Nashov equilibrium garantira igračima upravo taj profit. To znači da ili Bijeli ili Crni igrač imaju pobjedničku strategiju, ili obojica imaju strategiju koja im garantira remi.

Napomena 12. *Khunov teorem ne garantira jedinstvenost equilibriuma! Tako u primjeru 1 imamo dva savršena equilibriuma: $((2,0), yyy)$ i $((1,1), nyy))$ koji nisu ekvivalentni u preferencama niti jednog od igrača.*

No, jasno je i da igra u kojoj ni jedan igrač ne dolazi u dvojbu (tj. situaciju u kojoj je indiferentan između dvije ili više alternativa) ima jedinstveni equilibrium.

Moguće je i da igra ima više equilibriuma, no da su igrači među njima indiferentni.

Definicija 13. *Za konačnnu ekstenzivnu igru uz savršene informacije kažemo da ima svojstvo "neindiferentnosti" (engl. no indifference condition) ako*

$$\exists i \in N : \ z \sim_i z' \Rightarrow z \sim_j z' \ \forall j \in N$$

gdje su z i z' terminalne povijesti.

6. Dva proširenja definicije ekstenzivne igre

6.1. Slaba nesigurnost. Ponekad su poznate vjerojatnosti da igrač odigra neki potez. Tipično, to se događa kad je taj igrač Priroda ili neki drugi slučajni proces.

Definicija 14. *Ekstnzivna igra uz savršene informacije i vjerojatnosti poteza je uređena petorka* $(N, H, P, f_c, (\succeq_i))$ *za koju su* N, H, P *i* $(\succeq_i)$ *kao u definiciji 1, dok je* f_c *vjerojatnosna razdioba pridružena igračima i situacijama. Preciznije:*
Za svaki $h \in H$ *takav da je* $P(h) = c$, $f_c(\cdot|h)$ *je vjerojatnosna razdioba nad* $A(h)$ *(*$f_c(a|h)$ *je vjerojatnost da se* a *dogodi nakon* h*). Za svaka dva* c, c' *takva da je* $c \neq c'$, *razdiobe* f_c *i* $f_{c'}$ *su nezavisne.*

Definicije is prethodnih poglavlja (strategija, podigra,...) u ovom modelu ostaju nepromijenjene.

S pojmovima jake i slabe nesigurnosti ćemo se susresti i u Teoriji odlučivanja.

6.2. Simultani potezi. Definiciju 1 možemo modificirati kako bismo dozvolili da igrači simultano odigraju poteze nakon nekih povijesti, te da pri tome budu u potpunosti upoznati s proteklim događajima (dakle, s tom povješću).

Definicija 15. *Ekstnzivna igra uz savršene informacije i simultane poteze je uređena četvorka* $(N, H, P, (\succeq_i))$*za koju su* N, H *i* $(\succeq_i)$ *kao u definiciji 1, dok je* P *funkcija koja svakoj neterminalnoj povijesti pridružuje* **skup** *igrača.* H *i* P *zajednički zadovoljavaju uvjet da za svaku neterminalnu povijest* h *postoji kolekcija* $\{A_i(h) : \ i \in P(h)\}$ *skupova takvih da je*

$$A(h) = \{a : \ (h, a) \in H\} = \times_{i \in P(h)} A_i(h)$$

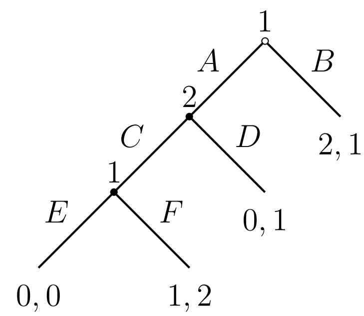
Povijest u ovako zadanoj igri je sekvenca vektora čije su komponente potezi pojedinih igrača u tom potezu (naravno, samo onih igrača koji u tom potezu igraju). Naravno, svaki igrač i dalje svoj potez bira iz skupa $A_i(h)$.

Strategija igrača $i \in N$ u ovakvoj igri je funkcija koja svakoj neterminalnoj povijesti h takvoj da je $i \in P(h)$ za neki $i \in N$ pridružuje akciju iz skupa $A_i(h)$. Definicija equilibriuma podigara ostaje ista, osim što više nemamo uvjet $P(h) = i$, nego ga zamjenjujemo s $i \in P(h)$.

Svojstvo jedne izmjene vrijedi i za ovakve igre, no Khunov teorem ne. Zašto?

7. Interpretacija pojma strategije

Već smo rekli da pojam strategije ne odgovara "akcijskom planu", jer traži od igrača da odrede svoje poteze i u onim situacijama do kojih ne može doći ako se drže te iste strategije. Vratimo se na igru iz primjera 2, ali sa zadanim ishodima (slika 4): strategija igrača 1 specificira što će on napraviti nakon povijesti (A, C) čak i onda kad ta ista strategija određuje da on u prvom potezu zaigra na B.



Slika 4. Igra iz primjera 2, uz zadane ishode

Jedna interpretacija "nemogućih" poteza u strategijama je ta da su to vjerovanja drugih igrača "što će taj igrač napraviti u slučaju da odigra drugačije nego je planirano".

U spomenutom primjeru, potez koji će igrač 1 izvesti nakon povijesti (A, C) možemo smatrati vjerovanjem igrača 2 o igri igrača 1. To vjerovanje igraču 2 treba kako bi mogao procijeniti što da napravi kad je sâm na potezu, tj. nakon povijesti (A).

Ako je igrač 1 planirao u prvom potezu odigrati potez A, onda se ovakvo razmišljanje igrača 2 slaže s "akcijskim planom" igrača 1. No, ako je igrač 1 planirao izvesti potez B, tada nam njegov "akcijski plan" ne bi ništa rekao o situaciji (A, C). No, strategija će nam i u takvoj situaciji reći kako treba odigrati.

Primijetimo još da izbor akcije igrača 1 u prvom potezu (izbor između A i B) ovisi i o tome što će igrač 2 odlučiti nakon povijesti (A), naravno ako do nje uopće dođe.

Ovakva interpretacija, iako logična i naizgled opravdava ovakav pojam strategije, povlači neke implikacije koje ne idu u prilog strategijama:

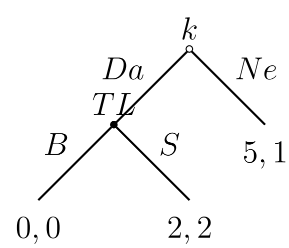
- Jednom kad imamo strategije, igranje se svodi na "izbor (optimalne) strategije". No, ako je strategija "vjerovanje igrača o potezima protivnika", igrač ne može izabrati "vjerovanja" svojih protivnika.
- Ako analiziramo igru s tri ili više igrača, te uz pretpostavku da vaki igrač ima jedinstvenu strategiju, ispada da za svakog igrača $i \in N$, vi njegovi protivnici imaju isto uvjerenje o njegovom načinu igre i to ne samo o njegovom načinu igre, nego i o potezima koje će izvesti ako odigra drugačije nego što se očekuje. Van sterilnih uvjeta "čiste teorije", to je vrlo malo vjerojatno.

Ovakva interpretacija strategije narušava i koncept savršenog equilibriuma podigara. U primjeru koji ovdje razmatramo, nema razumnog objašnjenja zašto bi igrač 1 u prvom potezu odigrao A umjesto B, jer su mu svi ishodi ako izabere A lošiji od onoga koji dobije ako izabere B (ovo, naravno, ne vrijedi općenito). Drugim riječima, da bi razmatrao svoju igru nakon povijesti (A), igrač 2 se mora odreći osnovnih pretpostavki Teorije igara, tj. mora pretpostaviti ili da igrač 1 nije racionalan, ili da na različite načine percipiraju igru, ili da je igrač 1 "pogriješio". No, koncept savršenog equilibriuma podigara zahtijeva od igrača 2 da zadrži upravo te osnovne pretpostavke o igraču 1: racionalnost, poznavanje igre i nepogrešivost.

8. Dvije poznate igre konačnog horizonta

U ovom poglavlju ćemo pokazati neke prednosti i mane savršenog euilibriuma podigara. Uvodimo diskretnu varijablu $vrijeme \in \mathbb{N}$ koja kreće od vrijednosti 0 ili 1 i sa svakim korakom se povećava za 1. Ovo ne mijenja početni model, nego jednostavno olakšava opis igara.

8.1. Igra trgovačkog lanca. Trgovački lanac (u daljnjem tekstu TL) ima trgovačke centre u K gradova, označenih $1, \ldots, K$. U svakom gradu k, TL ima jednog potencijalnog konkurenta, nazovimo ga takodđer k. U svakom trenutku k jedan od potencijalnih konkurenata (igrač k) odlučuje da li će konkurirati igraču TL ili ne. Ako odluči konkurirati, trgovački lanac mora odlučiti želi li surađivati (u oznaci S) ili se boriti protiv konkurencije (u oznaci B). Trgovački lanac svoju odluku donosi prije trenutka $k+1$. Dakle, u trenutku k, skup mogućih ishoda je : $Q = \{Ne, (Da, S), (Da, B)\}$. Ako je izazvan, trgovačkom lancu se više isplati surađivati nego boriti se, no najisplativije mu je da uopće nema konkurencije. Također, konkurentima je isplativije uopće se ne upuštati u konkuriranje ako naiđu na agresivan odgovor. Najveći profit konkurenti ostvaruju ako konkuriraju i trgovački lanac odluči surađivati s njima.



Slika 5. Jedan period u igri trgovačkog lanca

U svakom trenutku, igrač koji je na potezu zna što se događalo u prethodnim potezima. To nam omogućuje da modelirammo ekstenzivnu igru uz savršene informacije u kojoj je skup svih povijesti

$$H = (\cup_{k=0}^{K} Q^k) \cup (\cup_{k=0}^{K-1} (Q^k \times \{Da\}))$$

gdje je Q^k skup svih sekvenci od k elemenata skupa Q.

Funkcija igrača je zadana s

$$P(h) = \begin{cases} k+1\,, & \text{ako je } h \in Q^k \\ TL\,, & \text{ako je } h \in Q^k \times \{Da\} \text{ za neki } k \end{cases}$$

Profit u određenom ishodu je suma profita ostvarenih u svim prethodnim trenucima.

Ova igra ima pregršt Nashovih equilibriuma. To su sve situacije u kojima je ishod svakog trenutka Ne ili (Da, S). Naime, za izbor Ne, strategija trgovačkog lanca je borba u slučaju da se igrač k predomisli.

Zadatak 12. *Pokažite da igra ima samo jedan savršeni equilibrium podigara.*

Uputa: Svi konkurenti se uključuju na tržište i trgovački lanac se odlučuje na suradnju s njima.

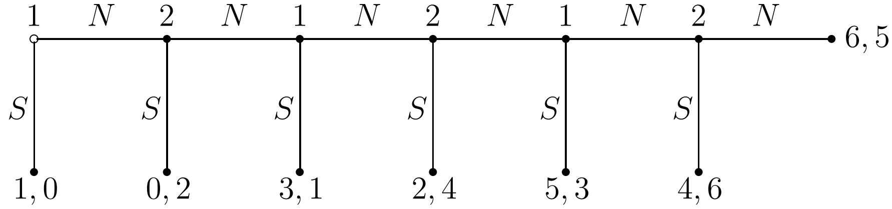
Za male K-ove, Nashovi equilibriumi koji nisu savršeni equilibriumi podigara jednostavno nisu zadovoljavajući, jer je neuvjerljivo da će se trgovački lanac čvrsto držati svoje odluke ako se neki konkurent predomisli. Naime, u tom slučaju se i trgovačkom lancu isplati predomisliti se i on ima vremena za to napraviti jer se potezi ne odvijaju simultano. S druge strane, savršeni equilibrium podigara je dobar, jer jedinu potencijalno isplativu promjenu može napraviti trgovački lanac, a njegovo predomišljanje ne može utjecati na konkurenta koji je već odigrao svoj potez.

No, za velike K-ove, ni savršeni equilibriumi podigara više nisu "uvjerljivi". Equilibrium nalaže suradnju sa svim konkurentima, pa bi svaki konkurent trebao očekivati suradnju, što bi ga onda potaklo na uključivanje u tržišno natjecanje. No, što ako trgovački lanac zaigra suprotno i krene u borbu sa svim prethodnim konkurentima (tj. onima koji su se uključili u tržište)?

Prema konceptu strategije, konkurent bi i dalje trebao slijepo vjerovati da će tržišni lanac baš prema njemu biti popustljiv (v. prethodno poglavlje). I, stvarno, trgovačkom lancu je lokalno isplativije surađivati, no dugoročno mu se više isplati izgraditi reputaciju agresivne kompanije, pa konkurent ima svako pravo očekivati oštar odgovor, pogotovo ako nakon njega slijedi još mnogo drugih konkurenata zbog kojih se trgovačkom lancu isplati žrtvovati lokalni profit za "bolju" reputaciju.

8.2. Igra stonoge. Dva igrača igraju naizmjence. Njihov izbor u svakom potezu je stati (u oznaci S) ili nastaviti igru (u oznaci N). Svaki igrač preferira stati u trenutku t ako njegov protivnik staje u trenutku $t+1$, no radije će nastaviti ako njegov protivnik također nastavi. Drugim riječima, obojica žele igrati što dulje, ali ne žele zaustavljanje igre prepustiti protivniku. Igra se igra najviše $T \in 2\mathbb{N}$ trenutaka.

Na slici 6 je prikazana igra stonoge za $T = 6$. Naziv igre potječe upravo od izgleda grafa.



Slika 6. Igra stonoge

Formalno, skup povijesti je:

$$H = \{N(t) :\ 0 \leq t \leq T\} \cup \{S(t) :\ 1 \leq t \leq T\}$$

gdje je

$$N(t) = (\underbrace{N, N, \ldots, N}_{t}) \text{ i}$$

$$S(t) = (\underbrace{N, N, \ldots, N}_{t-1}, S)$$

Funkcija igrača je $P(N(t)) = t \bmod 2 + 1$ za $0 \leq t < T$. Igrač $P(N(t))$ preferira $S(t+3)$ u odnosu na $S(t+1)$, kojeg pak preferira u odnosu na $S(t+2)$ za $t \leq T-3$. Igrač 1 preferira $N(T)$ u odnosu na $S(T-1)$, a njega preferira u odnosu na $S(T)$. Igrač 2 preferira $S(T)$ u odnosu na $N(T)$.

Zadatak 13. *Koji su Nashovi, a koji savršeni equilibriumi podigara kod igre stonoge?*

U svakom trenutku, razumno je očekivati da će protivnik zaustaviti igru u svom idućem potezu (zašto?). Savršeni equilibrium podigara se oslanja upravo na tu pretpostavku, mada je ona prekršena t puta u svakom trenutku $t > 0$. Naravno, za velike T-ove nerazumno je očekivati da će igrači zaustaviti igru odmah u svom prvom potezu (u krajnjoj liniji, bolje je izgubiti u četvrtom potezu, nego pobijediti u prvom).

Ova igra se donekle razlikuje od igre trgovačkog lanca, prvenstveno po tome što kroz cijelu igru **oba** igrača krše racionalnu percepciju igre nametnutu savršenim equilibriumom. Već nakon drugog trenutka (tj. nakon što drugi igrač po prvi put izabere nastavak igre), vjerovanje o protivničkom načinu igre ne može biti čisti pohlepni algoritam "traženja u tom trenutku najbolje akcije".

Rješenje ove igre prvenstveno ovisi o percepciji igrača, koja se može formalizirati dodatnim pojmovima, npr. ϵ-equilibriumom. Također, za rješavanje ove igre se može pribjeći i nekoj od metoda odlučivanja, no i ta rješenja nužno moraju ovisiti o samim igračima. Kraće: ne postoji jedno, univerzalno optimalno, rješenje.

9. Zadaci

ZADATAK 14. *Kreirajte Stackelbergovu igru u kojoj savršeni equilibrium ne odgovara rješenju maksimizacijskog problema.*

ZADATAK 15. *Kreirajte ekstenzivnu igru s beskonačnim horizontom za koju ne vrijedi svojstvo jedne izmjene.*

ZADATAK 16. *Pokažite da se uvjet Khunovog teorema na konačnost igre ne može oslabiti niti tako da se zahtijeva samo konačni horizont, niti tako da se zahtijeva da igrači u svakom potezu imaju konačno mnogo mogućih poteza.*

ZADATAK 17. *Dokažite: ako konačna igra ima svojsto "neindiferentnosti", onda su igrači indiferentni između svih savršenih equilibriuma podigara zadane igre.*
Uputa: *Dokaz možete provesti indukcijom, prema duljini pojedine podigre.*

ZADATAK 18. *Tri igrača dijele kolač tako da prvi igrač predloži podjelu, a drugi i treći simultano odgovore sa "da" ili "ne". Ako se oba igrača slože s podjelom (odgovore s "da"), podjela se prihvaća; u protivnom, nitko ne dobije ništa. Naravno, igrači žele dobiti što više kolača.*

Modelirajte igru i pronađite savršene equilibriume podigara.

Literatura

[1] Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein, "A Course in Game Theory", 8^{th} print, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2002.