# Jaka nesigurnost i socijalni aksiomi

## Sigurnost i nesigurnosti

**Odluke uz sigurnost.** Donositelj odluke točno zna posljedice svih svojih odluka. Efektivno, to znači da imamo točno jedno stanje svijeta (u primjeru iz prethodnog poglavlja, to bi značilo da znamo da li će se student ozlijediti ili ne).

**Odluke uz slabu nesigurnost (ili uz rizik).** Donositelj odluke ne zna posljedice svojih odluka, ali zna stanja svijeta (i posljedice u svakom stanju). Također, poznate su mu vjerojatnosti svih mogućih stanja svijeta. U spomenutom primjeru, slaba nesigurnost bi značila da nam je poznato kolika je vjerojatnost da će se student ozlijediti.

**Odluke uz jaku nesigurnost (ili potpuno neznanje).** Jedino što donositelj odluke zna o stanjima svijeta je koja su. Ne zna apsolutno ništa o vjerojatnosti da se neko od njih dogodi, niti je u stanju dati bilo kakve procjene. U prethodnom primjeru, to bi značilo da ne znamo ništa o vjerojatnosti ozljede studenta – možda je vani sve pod ledom, a možda je i sredina ljeta, pa nema nikakve opasnosti!

## Odlučivanje uz jaku nesigurnost

Postavlja se pitanje *Kako donijeti odluku u uvjetima jake nesigurnosti?* Ovdje ćemo razmotriti četiri najpoznatija prijedloga.

### *Četiri kriterija*

**Waldov kriterij maksimalnog povrata ulaganja (1950).** U slučaju izbora akcije $a_i$ najgora moguća posljedica ima težinu $s_i = \min_{j=1}^{n} v_{ij}$. $s_i$ zovemo **razina sigurnosti** akcije $a_i$. Ako vrijednosti $v_{ij}$ gledamo kao financijsku dobit, onda $s_i$ predstavlja garantiranu dobit u slučaju izbora akcije $a_i$. Waldov kriterij je "ziheraški", tj. ide na maksimizaciju sigurne dobiti:

$$\text{biramo alternativu } a_k \text{ takvu da je } s_k = \max_{i=1}^{m} \{s_i\} = \max_{i=1}^{m} \left\{ \min_{j=1}^{n} \{v_{ij}\} \right\}$$

Ovaj pristup je primijenjen na početku primjera "Minimizacija gubitka". Tamo smo naveli prednosti i mane pristupa, pa ih sada nećemo ponavljati. Naglasimo samo da je riječ o izrazito pesimističnom načinu donošenja odluke jer pretpostavljamo da će se, neovisno o našoj odluci, dogoditi najgore.

**Primjer 1:** Donositelj odluke ima izbor:

- Igrati sljedeću igru:
  Deset puta baca savršeni novčić. Ako svaki put padne pismo, ne dobija ništa; inače dobija 10.000.000.000,00 €
- Bezuvjetno uzeti 1 €

Ovaj primjer nije dobar . Zašto?

Očito, ovo nije odlučivanje uz jaku nesigurnost, nego uz rizik.

**Primjer 2:** Donositelj odluke ima izbor:

- Igrati igru u kojoj s nepoznatom vjerojatnošću može dobiti 10.000.000.000,00 € ili ništa
- Bezuvjetno uzeti 1 €

Waldov kriterij bi nam, kao "dobru" odluku dao drugu alternativu, gotovo u potpunosti zanemarujući svote o kojima je riječ!

**Hurwiczov optimistično-pesimistični indeks (1951).** Slično Waldovom pesimističnom kriteriju, možemo uvesti i optimistični kriterij, definiranjem **razine optimizma**: $o_i = \max_{j=1}^{n} v_{ij}$. Dakle $o_i$ je najbolji mogući rezultat akcije $a_i$. Sada imamo **maximax** kriterij:

$$\text{biramo alternativu } a_k \text{ takvu da je } o_k = \max_{i=1}^{m} \{o_i\} = \max_{i=1}^{m} \left\{ \max_{j=1}^{n} \{v_{ij}\} \right\}$$

Ovom kriteriju se može mnogo toga predbaciti, čak i više nego Waldovom. U osnovi, on je jednostavno prerizičan.

Očito, ovi ekstremi su loši. Hurwiczov kriterij pokušava objediniti ova dva pristupa. Prema ovom kriteriju, donositelj odluke bi trebao uzeti u obzir stanovitu količinu sigurnosti i stanovitu količinu optimizma:

$$\text{biramo alternativu } a_k \text{ takvu da je } \alpha s_k + (1-\alpha) o_k = \max_{i=1}^{m} \{\alpha s_i + (1-\alpha) o_i\}$$

Očito, da bi donio korektnu odluku, donositelj odluke mora znati faktor $\alpha$. On je specifičan za svakog donositelja odluke, a zajednički za sve probleme koje taj donositelj razmatra. Kako odrediti faktor $\alpha$?

Razmotrimo slijedeći problem:

| | $\Theta_1$ | $\Theta_2$ | $s_i$ | $o_i$ | $\alpha s_k + (1-\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | $(1-\alpha)$ |
| $a_2$ | $v$ | $v$ | $v$ | $v$ | $v$ |

Želimo postići neodlučnost, tj. da donositelj odluke ne može razlikovati alternativu $a_1$ (o kojoj treba donijeti odluku) i alternativu $a_2$ (kod koje je svejedno da li je pesimist ili optimist). Drugim riječima, tražimo $v$ takav da je $v = (1-\alpha)$. Kao što smo već rekli, indeks je $\alpha$ konstantan za donositelja odluke (tj. ne ovisi o rješavanom problemu). Zato ovako dobiveni $\alpha$ donositelj odluke može primijeniti na sve ostale odluke.

**Savageova minimizacija gubitka (1951).** Riječ je od metodi prikazanoj u primjeru "Minimizacija gubitka". Naime, kako ne znamo ništa o stanjima svijeta, Savage tvrdi da akcije treba uspoređivati prema pojedinim stanjima svijeta, a ne u cjelini. Općenito "loša" akcija može u nekom stanju svijeta biti najbolja moguća. Zato definiramo "gubitak" ("regret"): $r_{ij} = \max_{l=1}^{m} v_{lj} - v_{ij}$. Riječima: gubitak je razlika najveće moguće dobiti u danom stanju svijeta i dobiti u konkretnoj akciji $a_i$, u tom istom stanju svijeta.

Nadalje, definiramo najveći gubitak za neku akciju: $\rho_i = \max_{j=1}^{n} \{r_{ij}\}$. Očito, najveći očekivani gubitak želimo minimizirati, pa odluku donosimo na slijedeći način:

$$\text{biramo alternativu } a_k \text{ takvu da je } \rho_k = \min_{i=1}^{m} \{\rho_i\} = \min_{i=1}^{m} \left\{ \max_{j=1}^{n} \{r_{ij}\} \right\}$$

**Laplaceov "princip nedostatne argumentacije" (1825).** Laplace kreće od tvrdnje: "ne znati ništa o pravom stanju svijeta" je ekvivalentno tvrdnji da su "sva stanja svijeta jednako vjerojatna". Ovakvo razlučivanje, kao i ostala, ima svoje "za" i "protiv" (poglavlje 6.3 u Frenchu).

Ovaj princip, u osnovi, predlaže maksimizaciju srednje vrijednosti akcija. Naime, ako su sva stanja svijeta jednako vjerojatna, onda je očekivana vrijednost akcije $a_i$ dana formulom $\sum_j (1/n) \cdot v_{ij}$. Dakle, Laplaceov kriterij je:

$$\text{biramo alternativu } a_k \text{ takvu da je } \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot v_{kj} = \max_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot v_{ij} \right\}$$

Napomenimo da su ovi kriteriji – naoko svi logični – bitno različiti. Razmotrimo Milnorov primjer (1954):

| | $\Theta_1$ | $\Theta_2$ | $\Theta_3$ | $\Theta_4$ | $s_i$ | $o_i$ | $\sum_j (1/n) \cdot v_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5/4 |
| $a_2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_3$ | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 | 1 |
| $a_4$ | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 |

Za bilo koji $\alpha < \frac{3}{4}$, prema Hurwiczovom kriterij ćemo izabrati akciju $a_3$. Za ostale je očito: prema Laplacu biramo akciju $a_1$, prema Waldu $a_2$, a prema Savageu $a_4$ (raspišite tablicu!).

## *Razumni zahtjevi na metode odlučivanja uz jaku nesigurnost (Socijalni aksiomi)*

Pokazali smo četiri razumna, a ipak kontradiktorna kriterija odlučivanja. Naoko razumnih kriterija ima još mnogo (neki su dani u Frenchu, poglavlje 2.7). Pogledajmo neke aksiome koji predstavljaju manje-više razumne zahtjeve na metode odlučivanja. Većina tih aksioma ima i pobornike i protivnike. Na kraju ćemo vidjeti kojim aksiomima udovoljavaju prikazane metode.

**Aksiom 1: Potpunost rangiranja.** Metoda mora dati potpuno rangiranje svih mogućih akcija.

Koliko god se ovaj zahtjev činio razuman, mnogi autori tvrde da je dovoljno da metoda "izbaci" samo najbolju alternativu. To se može činiti kao razuman zahtjev, no može značajno otežati donošenje odluka u praksi, recimo kad izabrana alternativa prestane biti dostupna.

Također, ako metoda daje samo najbolju alternativu, onda možemo razmotriti problem koji nastaje uklanjanjem te alternative. Na taj način ćemo opet dobiti "najbolju" alternativu. Nju je tada razumno smatrati drugom najboljom u početnom problemu.

Ipak, ovaj način dobijanja rangiranja pomoću nalaženja samo najboljih alternativa implicitno podrazumijeva prihvaćanje kontroverznog aksioma o irelevantnim alternativama.

**Aksiom 2: Neovisnost o oznakama.** Neka je dana tablica odlučivanja $m\times n$ sa stanjima $(\Theta_j)_{j=1}^n$, akcijama $(a_i)_{i=1}^m$ i težinama $(v_{ij})_{i=1}^m{}_{j=1}^n$. Neka je druga tablica odlučivanja $m\times n$ sa stanjima $(\Theta'_j)_{j=1}^n$, akcijama $(a'_i)_{i=1}^m$ i težinama $(v'_{ij})_{i=1}^m{}_{j=1}^n$ konstruirana uz pomoću permutacije redaka $\pi$ i permutacije stupaca $\tau$. Drugim riječima, vrijedi: $a'_{\pi(i)}=a_i$, $\Theta'_{\tau(j)}=\Theta_j$ i $v'_{\pi(i)\tau(j)}=v_{ij}$. Tada metoda odlučivanja mora akcijama dodijeliti težine $(V_i)_{i=1}^m$ (u prvoj tablici) i $(V'_i)_{i=1}^m$ (u drugoj tablici) tako da vrijedi:

$$V_i>V_k \text{ ako i samo ako } V'_{\pi(i)}>V'_{\pi(k)}$$

**Aksiom 3: Neovisnost o mjernoj skali.** Neka je dana tablica odlučivanja $m\times n$ sa stanjima $(\Theta_j)_{j=1}^n$, akcijama $(a_i)_{i=1}^m$ i težinama $(v_{ij})_{i=1}^m{}_{j=1}^n$. Neka je druga tablica odlučivanja $m\times n$ sa istim stanjima i akcijama konstruirana zadavanjem težina u drugoj mjernoj skali: $v'_{ij}=\alpha v_{ij}+\beta$, za neke zadane $\alpha>0$ i $\beta$. Tada metoda odlučivanja mora akcijama dodijeliti težine $(V_i)_{i=1}^m$ (u prvoj tablici) i $(V'_i)_{i=1}^m$ (u drugoj tablici) tako da vrijedi:

$$V_i>V_k \text{ ako i samo ako } V'_i>V'_k$$

**Aksiom 4: Jaka dominacija.** Ako jedna akcija dominira nad drugom u svim stanjima svijeta, onda metoda nužno mora tu dominantnu akciju izabrati kao "bolju". Preciznije:

$$v_{ij}>v_{kj} \text{ za sva stanja } \Theta_j \Rightarrow V_i>V_k$$

**Aksiom 5: Neovisnost o irelevantnim alternativama.** Rangiranje dvije alternative ne smije ovisiti o ostalim alternativama. Koliko god se ovaj aksiom čini razuman, na njemu se "lome koplja". Jedan od najjačih prigovora Saatyjevoj metodi je upravo to što ne udovoljava ovom aksiomu. Pogledajmo poznati protuprimjer ovom aksiomu.

Čovjek dođe u restoran u kojem za glavno jelo može odabrati odrezak ili pečeno pile. On odabere pečeno pile. Prilikom narudžbe, konobar ga obavijesti da imaju i "specijalitet dana" – čudno jelo koje ja ne znam prevesti: Dover sole with a white wine and herb sauce. Čovjek se odmah predomisli i izabere odrezak.

Većina će se složiti da je odluka bila inkonzistentna. Ipak, ona to ne mora nužno biti (zašto ne?).

Osobno, smatram da ovaj primjer nema veze sa aksiomom, te sam aksiom smatram u potpunosti razumnim.

Ovdje nećemo navesti formalni zapis ovog aksioma; on ide jednostavnim dodavanjem jedne alternative u početnu tablicu. Pri tome zahtijevamo da metoda ne dira u međusobni uređaj početnih alternativa.

**Aksiom 6: Neovisnost o dodavanju konstante stupcu.** Ovaj aksiom je u bliskoj vezi s aksiomom 3. Prikazali smo ga u primjeru "Minimizacija gubitka", pa ga nećemo dodatno raspisivati. Recimo još samo da u nekim situacijama ima smisla tražiti zajedničko poopćenje ta dva aksioma: neovisnost o mjernoj skali po pojedinim stupcima (umjesto po cijeloj tablici).

Aksiomi koje smo do sada nabrojali imaju smisla za sve metode odlučivanja, bez obzira na stupanj nesigurnosti. Dapače, te aksiome zadovoljava pravilo očekivane korisnosti (problem 2.7.7. u Frenchu). Iduća dva aksioma odnose se samo na odlučivanje uz jaku nesigurnost.

**Aksiom 7: Neovisnost o permutacijama stupaca.** Neka su u tablici odlučivanja dane alternative $a_i$ i $a_k$ takve da postoji permutacija $\tau$ takva da vrijedi: $v_{ij}=v_{k\tau(j)}$ . Tada metoda odlučivanja mora dati $V_i=V_k$ .

U osnovi, ovaj aksiom kaže da nije bitno u kojim stanjima se vrijednosti događaju dok god ne znamo ništa o samim stanjima. Tada je dovoljno koje se vrijednosti postižu.

**Aksiom 8: Neovisnost o dupliciranju stupaca.** Neka je dana tablica odlučivanja (kao u aksiomu 3), te neka je druga tablica konstruirana na temelju prve, duplikacijom $n$-tog stupca, tj.

$$v'_{ij}=\begin{cases} v_{ij} & 1\leq j\leq n \\ v_{in} & j=n \end{cases}, \text{ za sve } i\in\{1,\ldots,m\}$$

Tada pravilo odlučivanja treba alternativama dodijeliti težine tako da vrijedi:

$$V_i>V_k \text{ ako i samo ako } V'_i>V'_k,\ \ 1\leq i,k\leq m$$

Činjenica je da o stanjima svijeta ne znamo ništa. Zato dupliciranje – možda suprotno očekivanom – ne povećava vjerojatnost da će se dogoditi neko stanje svijeta.

Naravno, primjenom drugih aksioma (preciznije, aksioma 2 – o neovisnosti rangiranja o oznakama) dobijamo da se duplicirati može proizvoljni stupac. Također, višestrukom primjenom aksioma 8 možemo dobiti proizvoljan broj kopija proizvoljnog stupca.

## *Analiza četiri kriterija*

**Teorem 1.** Četiri prikazane metode odlučivanja (ne)zadovoljavaju nabrojane aksiome kako je prikazano slijedećom tablicom (√ označava da metoda zadovoljava, a × da ne zadovoljava dani aksiom).

| | Wald | Hurwicz | Savage | Laplace |
|---|---|---|---|---|
| Aksiom 1: Potpunost rangiranja | √ | √ | √ | √ |
| Aksiom 2: Neovisnost o oznakama | √ | √ | √ | √ |
| Aksiom 3: Neovisnost o mjernoj skali | √ | √ | √ | √ |
| Aksiom 4: Jaka dominacija | √ | √ | √ | √ |
| Aksiom 5: Neovisnost o irelevantnim alternativama | √ | √ | × | √ |
| Aksiom 6: Neovisnost o dodavanju konstante stupcu | × | × | √ | √ |
| Aksiom 7: Neovisnost o permutacijama stupaca | √ | √ | × | √ |
| Aksiom 8: Neovisnost o dupliciranju stupaca | √ | √ | √ | × |

Teorem nećemo dokazivati. Veći dio raspisa je dan u Frenchu, poglavlje 2.5.

Naglasimo samo da je bitno neslaganje Laplaceovog kriterija s aksiomom 8 (no to je ujedno i očita tvrdnja koju ne treba dokazivati).

**Teorem 2 (Milnor).** Pretpostavimo da neka metoda odlučivanja zadovoljava aksiome 1, 4, 5, 6 i 7. Tada nužno vrijedi:

$$V_i \geq V_k \text{ ako i samo ako } \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot v_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot v_{kj}$$

Drugim riječima, ako metoda zadovoljava tih 5 aksioma, onda je nužno riječ o Laplaceovoj metodi.

**Dokaz.** Za početak, primijetimo da nam aksiom 1 treba da bi mogli pretpostaviti da metoda svakoj akciji $a_i$ pridružuje težinu $V_i$. Također, bez smanjenja općenitosti (primjenom aksioma 6) možemo pretpostaviti da je $v_{ij} \geq 0$.

Dokaz provodimo transformacijama tablice dok izbor bolje alternative ne postane "očit", uz određenu dozu nepreciznosti (da se izbjegne nepotrebno kompliciranje). Što znači da izbor postane "očit"? To znači da ćemo za proizvoljne dvije akcije dobiti da su njihove težine u svim stanjima svijeta jednake ili da jedna jako dominira nad drugom.

Prvo razmatramo akcije $a_i$ i $a_k$ takve da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot v_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot v_{kj}$$

Želimo pokazati da to implicira $V_i = V_k$.

Uvodimo nove oznake: $a_i^l$ i $v_{ij}^l$ – akcije i njihove težine dobivene u *l*-tom koraku transformacija. Krećemo od $l=1$, uz $a_i^0 = a_i$ i $v_{ij}^0 = v_{ij}$.

*Korak 1.* U tablicu dodajemo akcije $a_i^l$ i $a_k^l$ čije su težine dobivene sortiranjem težina $v_{ij}^l$, odnosno $v_{kj}^l$. Prema aksiomu 5 (Neovisnost o irelevantnim alternativama), nove alternative neće promijeniti poredak "starih" alternativa $a_i^{l-1}$ i $a_k^{l-1}$.

*Korak 2.* Dodajemo alternative $a_i^{l+1}$ i $a_k^{l+1}$ takve da je $v_{ij}^{l+1} = v_{ij}^l - \min\{v_{ij}^l, v_{kj}^l\}$ i $v_{kj}^{l+1} = v_{kj}^l - \min\{v_{ij}^l, v_{kj}^l\}$ za svaki *j*. Prema aksiomu 6, ni ova transformacija neće utjecati na poredak alternativa (oduzimanje treba izvesti na cijelim stupcima, no ostale nas vrijednosti ne zanimaju, pa nije bitno što se tamo događa).

Korake 1 i 2 možemo ponavljati. Očito, u konačno mnogo koraka ćemo doći do retka sastavljenog samo od nula (dok ni jedan redak nije sastavljen samo od nula, nakon sortiranja u zadnjem stupcu nemamo nule, pa se vrijednosti oduzimanjem smanjuju). No, početni reci su imali jednake sume, a transformacije koje radimo čuvaju jednakost suma redaka (jer oduzimamo iste vrijednosti od oba retka), pa i konačni reci imaju međusobno jednake sume. Drugim riječima, reci će istovremeno postati nul-reci u nekom *v*-tom koraku.

Sada je očito, prema aksiomu 7 (Neovisnost o permutacijama stupaca) da vrijedi:

$$V_i^v = V_k^v \Rightarrow V_i^{v-1} = V_k^{v-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow V_i^0 = V_k^0 \Rightarrow V_i = V_k$$

Pretpostavimo sada da vrijedi: $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot v_{ij} > \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot v_{kj}$. U tom slučaju početnoj tablici dodajemo akciju $a_l$ takvu da je $v_{lj}=v_{ij}-\sum_{j'=1}^{n}\frac{1}{n}\left(v_{ij'}-v_{kj'}\right)$, pa onda očito vrijedi: $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot v_{lj}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot v_{kj}$, tj. $V_l=V_k$. Dalje, prema aksiomima 4 (Jaka dominacija) i 5 (Neovisnost o irelevantnim alternativama) imamo $V_i>V_k$.

❀

**Korolar 3.** Ni jedan kriterij odlučivanja ne može zadovoljiti sve aksiome.

**Dokaz.** Očito iz Teorema 2 i Teorema 1 – neslaganje Laplacea i aksioma 8.

❀

Kako je to moguće? Ili smo si postavili nemoguć zahtjev – donošenje "ispravne" odluke (štogod to značilo) u uvjetima jake nesigurnosti – ili su zahtjevi aksioma jednostavno prejaki. Razmotrimo ovu drugu pretpostavlku.

**Aksiom 1: Potpunost rangiranja.** Ovo smo već raspravili prije. Podsjećamo: argumentacija da i metode koje daju samo najbolju alternativu posredno daju i cijelo rangiranje stoji samo ako se u obzir uzme i aksiom 5 (Neovisnost o irelevantnim alternativama).

Ipak, dokaz korolara 3 je moguće provesti i bez pretpostavke da je zadovoljen aksiom 1, no tada je to bitno kompliciranije i zahtijeva dodatne zahtjeve na ostale aksiome.

**Aksiom 2: Neovisnost o oznakama.** Ovo je "najčišći" aksiom i tu se nitko ne protivi – jednostavno tražimo da odluka ne ovisi o pridijeljenim oznakama.

**Aksiom 3: Neovisnost o mjernoj skali.** Ovaj aksiom je čak i preslab! Naime, zašto bi sve mjerne skale za neki kriterij bile povezane afinom funkcijom? U Frenchu, poglavlje 3.6, je pokazano da je svaka monotona transformacija primjenjiva.

**Aksiom 4: Jaka dominacija.** Još jedan aksiom koji bi bilo besmisleno pobijati.

**Aksiom 5: Neovisnost o irelevantnim alternativama.** Vjerojatno najkontroverzniji aksiom. U primjeru s čovjekom u restoranu, možda čovjek preferira odrezak, a ne pečeno pile, no ono mu je ipak puno draže od loše pečenog odreska. Kako ne zna kakav je restoran, on se odlučuje za pile. Kad sazna da se nudi i neko "fancy" jelo, on može zaključiti da je riječ o dobrom restoranu i pretpostaviti da će i odrezak biti dobar.

Ovakvo razmatranje je prilično diskutabilno, jer u igru ulaze nove informacije. Dapače, one imaju različiti efekt na alternative, što se kosi s načelom potpune nesigurnosti. Mnogi autori tvrde da se novonastalo znanje ne odnosi na alternative, nego na donosioca odluke. Razmatranje treće alternative može jednostavno svrnuti pažnju na neki kriterij koji prije nismo uzeli u razmatranje.

Ipak, jednom kad se donositelj odluke upozna sa svim aspektima odluke koju donosi, "nevažne" alternative više ne bi smjele utjecati na njegovu odluku. Drugim riječima, neovisnost o irelevantnim alternativama ima smisla, no treba paziti koje su to alternative stvarno "irelevantne".

**Aksiom 6: Neovisnost o dodavanju konstante stupcu.** Još jedan diskutabilni aksiom. Prije nego navedemo razloge protiv ovog aksioma, pogledajmo još jednu motivaciju za njegovo prihvaćanje. Neka su moguća stanja svijeta $\Theta_1$ i $\Theta_2$, zajednička za iduća tri problema odlučivanja:

| | $\Theta_1$ | $\Theta_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | 0 | -8 |
| $a_2$ | -10 | 0 |

| | $\Theta_1$ | $\Theta_2$ |
|---|---|---|
| $a_1'$ | 20 | 0 |
| $a_2'$ | 20 | 0 |

| | $\Theta_1$ | $\Theta_2$ |
|---|---|---|
| $a_1''$ | 10 | -4 |
| $a_2''$ | 5 | 0 |

Očito donositelj odluke neće moći odlučiti između alternativa $a_1'$ i $a_2'$ (druga tablica). Izbor u preostale dvije tablice nije tako očit. Primijetimo još da vrijedi:

$$v_{ij}''=\frac{1}{2}v_{ij}+\frac{1}{2}v_{ij}'$$

Pretpostavimo da donositelj odluke mora odlučiti između "prve" i "druge" alternative, ali ne zna u kojoj tablici: prvoj ili trećoj; to će ovisiti o rezultatu bacanja "poštenog" novčića. Donositelj će preferirati akciju $a_1$ u prvoj tablici ako i samo ako će preferirati i akciju $a_1''$ u trećoj tablici (zašto?). Ako, u skladu s aksiomom 3 (Neovisnost o mjernoj skali) udvostručimo vrijednosti u trećoj tablici, dobit ćemo vrijednosti koje su dobivene iz prve tablice dodavanjem konstante (20) prvom stupcu. Konzistentnost koju ovdje zahtijevamo dovodi upravo do aksioma 6.

Ipak, postoje i jaki razlozi protiv ovog aksioma. Osnovni leži u psihologiji: što je količina nekog dobra veća, to je manja vrijednost pojedinih jedinica. Na primjer, 1 € vrijedi puno više čovjeku koji ima 10 € nego onome koji ima 1.000.000 €. Istina, ovaj argument pada u vodu ako funkcija vrijednosti mjeri preference u linearnoj skali. Ipak, to u praksi često nije slučaj.

**Aksiom 7: Neovisnost o permutacijama stupaca.** Čest prigovor ovom aksiomu je da neovisnost o permutacijama stupaca u praksi znači točno ono što Laplace pretpostavlja: jednaku vjerojatnost za sva stanja svijeta. Pokazano je da svi kriteriji odlučivanja koji zadovoljavaju pravila slična aksiomima 1-6, izgledaju ovako:

biramo alternativu $a_k$ takvu da je $\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot v_{kj} = \max_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot v_{ij} \right\}$

gdje su $p_j$ nenegativni koeficijenti takvi da je $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ . Ako pravilo zadovoljava i aksiom 7, lako je zaključiti da onda vrijedi $p_j=\frac{1}{n}$ .

Ovdje je prirodno $p_j$ interpretirati kao vjerojatnost da se dogodi stanje svijeta $\Theta_j$ (mada nije i nužno), što nas navodi na zaključak da aksiom 7 pretpostavlja jednaku vjerojatnost za sva stanja u kojima se svijet može naći. Ovo je pak u suprotnosti s s konceptom jake nesigurnosti po kojem o stanjima svijeta ne znamo apsolutno ništa.

Dakle, aksiom 7 s posljedicom jednake vjerojatnosti svih stanja svijeta nije dobra karakterizacija jake nesigurnosti.

Razmotrimo još jedan primjer: Savageov kriterij ne zadovoljava aksiome 5 (Neovisnost o irelevantnim alternativama) i 7 (Neovisnost o permutacijama stupaca).

| | $\Theta_1$ | $\Theta_2$ | $\Theta_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 6 | 0 | 3 |
| $a_2$ | 0 | 3 | 6 |
| $a_3$ | 2 | 9 | 4 |

Koliko smisla ima da se naša percepcija akcija ili stanja svijeta promijeni pod utjecajem treće alternative? Ovo razmišljanje je vrlo slično argumentaciji u raspravi o aksiomu 5.

Čini se da aksiom 7 nije dovoljan, ali je nužan uvjet za karakterizaciju jake nesigurnosti. Upravo je pokušaj proširenja ove karakterizacije do stvarnog pojma jake nesigurnosti doveo do donošenja aksioma 8.

**Aksiom 8: Neovisnost o dupliciranju stupaca.** Osobno, ovaj aksiom mi se u početku činio "čudan" u smislu "ako ih ima više, jasno je da su više vjerojatni". To je pogrešno zaključivanje! Riječ je o našem ugrađenom percipiranju jake nesigurnosti upravo na način na koji je to napravio Laplace.

Stvarno, ako o stanjima svijeta ne znamo apsolutno ništa, zašto bi proizvoljna dva stanja bila manje ili više vjerojatna od jednog (trećeg)?

Svrha aksioma 7 i 8 je upravo definiranje jake nesigurnosti. No, koliko je uopće takva ideja "legitimna"? Tablice odlučivanja ne padaju samo tako "s neba". One se baziraju na "živim" problemima koje donositelji odluka trebaju riješiti. Da li je stvarno moguće da donositelj odluke ne zna apsolutno ništa o mogućim stanjima svijeta? Uzmemo li u obzir činjenicu da $\Theta_j$ nisu samo simboli nego stvarne okolnosti, onda postaje prilično jasno da jaka nesigurnost nije moguća.

Da li bi odluku o postavljanju rasvjete u muzeju povjerili slijepcu (od rođenja) i to bez da mu išta kažemo o postojećoj rasvjeti, prozorima i sl.? Složit ćete se, ovdje je podjednako riječ o "jakoj nesigurnosti" i odluci kojoj nije moguće ni najmanje vjerovati.

**Primjer:** Mali Ivica je gladan i majka mu želi spremiti omlet od šest jaja. Upravo je razbila pet jaja i ubacila ih u posudu. U tom trenutku, došao je poštar, pa je majka rekla Ivici da sam dovrši omlet. Ivica sada razmišlja kako razbiti šesto jaje:

| | ***Jaje je dobro*** | ***Jaje je pokvareno*** |
|---|---|---|
| Razbiti jaje direktno u posudi | omlet od 6 jaja | nema omleta + uništeno 5 dobrih jaja |
| Razbiti jaje u posebnoj posudi | omlet od 6 jaja + dodatna posuda za oprati | omlet od 5 jaja + dodatna posuda za oprati |
| Baciti jaje | omlet od 5 jaja + upropašteno dobro jaje | omlet od 5 jaja |

Naravno, slično kao u primjeru s fotokopiraonama (s prethodnih vježbi), ni ovdje ne možemo odmah odlučiti – potrebno je prvo odrediti vrijednosti pojedinih akcija. Ta procjena, naravno, leži na malom Ivici (i njegovom velikom apetitu).

U ovom poznatom "primjeru s jajetom", svi će se složiti da je vjerojatnost da je šesto jaje pokvareno razmjerno mala. Dakle, nešto ipak znamo i o tim stanjima svijeta.

Zbog svega navedenog, aksiome 7 i 8, kao i koncept jake nesigurnosti odbacujemo kao nerealne.